

# Back-Action Evading Measurements of an Optical Field Using Parametric Down Conversion

パラメトリック下方変換を用いた  
光電場のバックアクション回避測定

A. La Porta, R. E. Slusher, and B. Yurke  
Physical Review Letters **62**, 28 (1989)

08041033 松田陵平

# 論文の概要

パラメトリック増幅を用いた  
光の直交位相振幅の  
バックアクション回避測定を  
初めて行った。

# 発表の流れ

## 予備知識

- バックアクション回避測定
- 直交位相振幅
- ホモダイン検出
- パラメトリック増幅
- パラメトリック増幅を用いた  
バックアクション回避測定

## 実験について

- 実験系
- 実験方法
- 実験結果

## まとめ

# 発表の流れ

## 予備知識

- バックアクション回避測定
- 直交位相振幅
- ホモダイン検出
- パラメトリック増幅
- パラメトリック増幅を用いた  
バックアクション回避測定

## 実験について

- 実験系
- 実験方法
- 実験結果

## まとめ

# バックアクション回避測定でない例

## 自由粒子の位置 $x$ の測定

時刻 $t=0$ において、自由粒子の位置座標を $\Delta x_i$ の精度で決定した時、  
ハイゼンベルグの不確定性関係より  $(\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2})$ ,  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x_i} \quad (\text{運動量の不確定さ})$$

よって

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x_i} \quad (\text{速度の不確定さ})$$



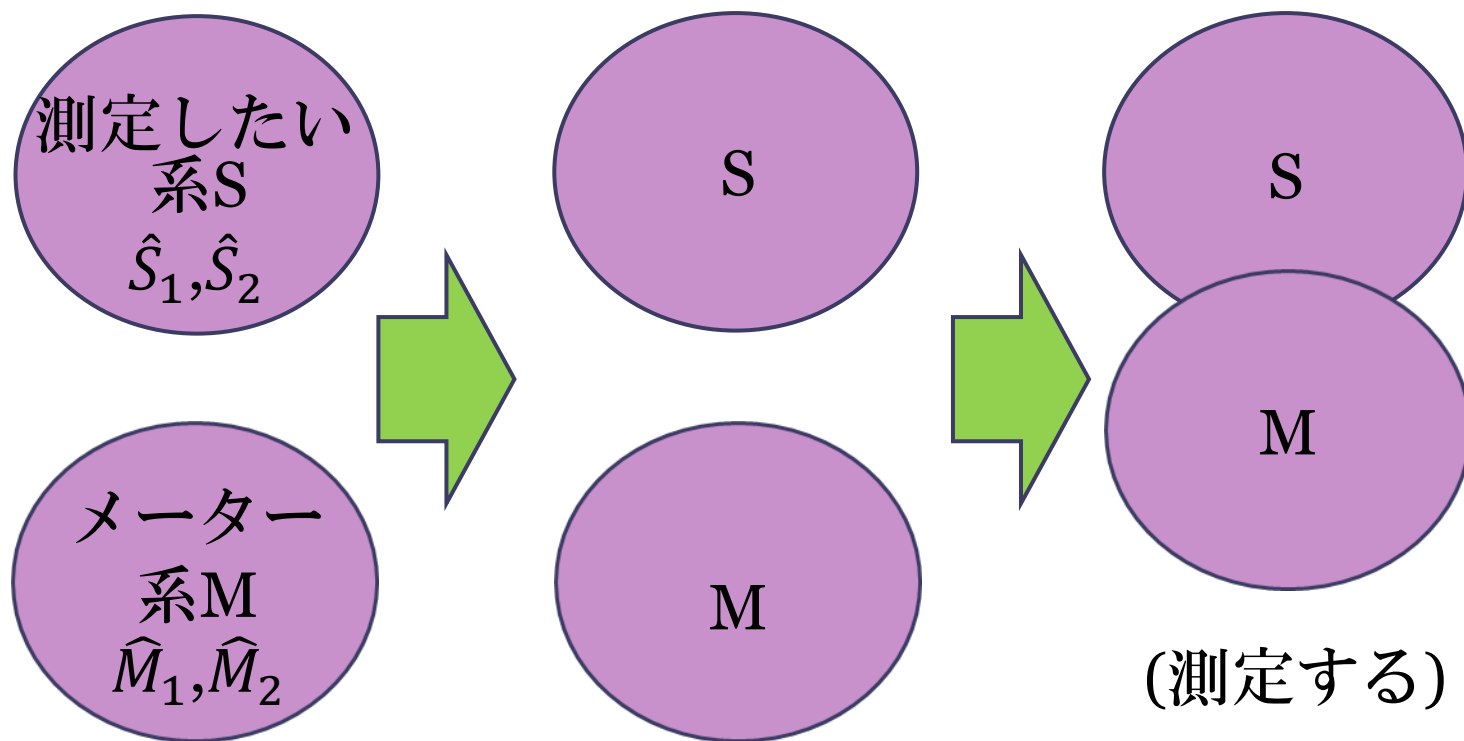
時間 $\tilde{t}$ 経過すると

$$\Delta x_m = \Delta v \tilde{t} \geq \frac{\hbar \tilde{t}}{2m\Delta x_i}$$

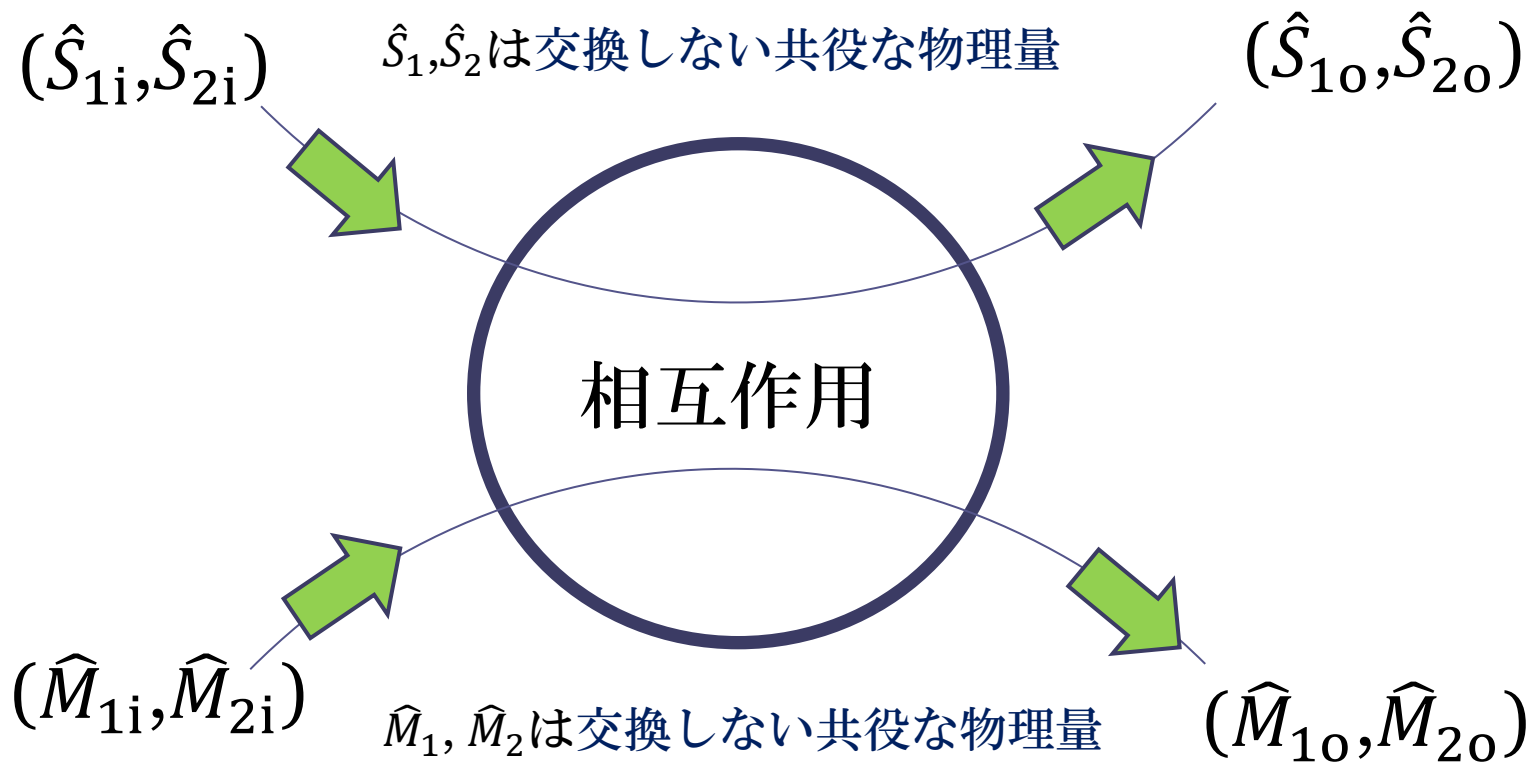
最初の測定の結果から運動量の不確定さを生じ、時間発展により運動量の不確定さが位置の不確定さに影響を及ぼします。

# バックアクション回避測定の方法

S . . . signal  
M . . . meter



# バックアクション回避測定



- $\hat{M}_{1o}$  を測定し  $\hat{S}_{1i}$  についての情報を得る。
- 測定の影響は  $\hat{S}_{2o}$  のみに出る。

(本論文で測定する物理量: 光の直交位相振幅)

# 発表の流れ

## 予備知識

- バックアクション回避測定
- 直交位相振幅
- ホモダイン検出
- パラメトリック増幅
- パラメトリック増幅を用いた  
バックアクション回避測定

## 実験について

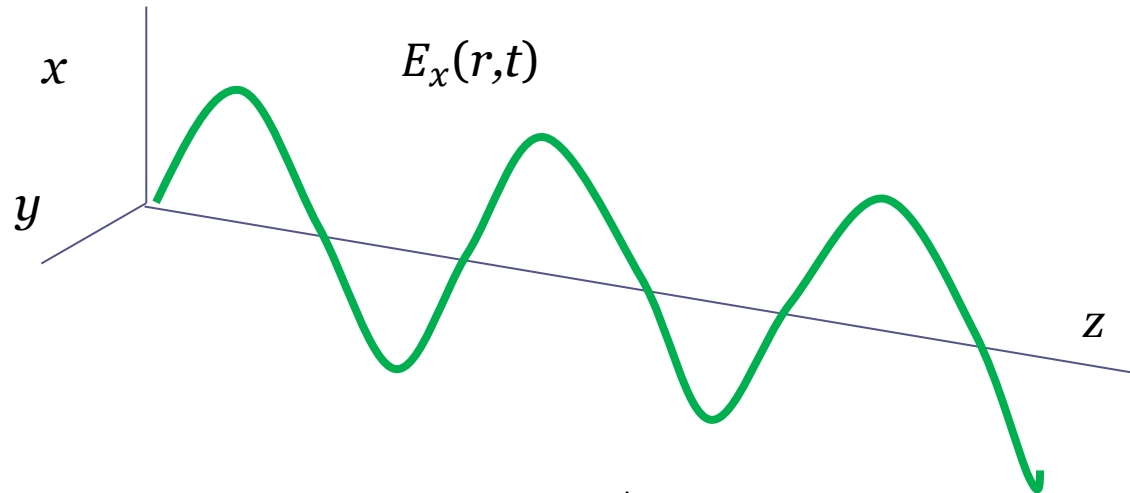
- 実験系
- 実験方法
- 実験結果

## まとめ



# 直交位相振幅

平面電磁波を考える。



$$E_x(\vec{r}, t) = E_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} + E_0^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t}$$

次元を表す係数  $\epsilon = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}$  と振幅の大きさを表す

無次元の複素数  $a, a^*$  によって

$$E_x(\vec{r}, t) = \epsilon [a e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} + a^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t}]$$

$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]=1$ となるような演算子で置き換えると

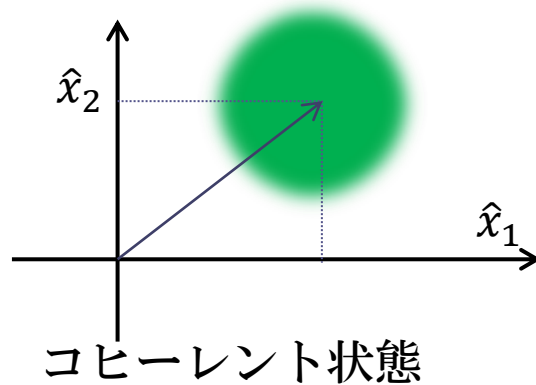
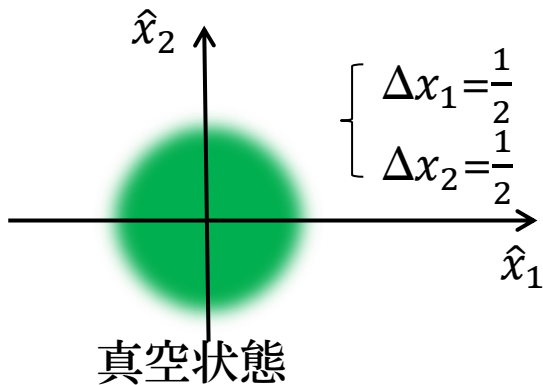
$$\hat{E}_x(r,t) = \varepsilon[\hat{a}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t} + \hat{a}^*e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}+i\omega t}]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_1 \equiv \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{2} \\ \hat{x}_2 \equiv -i\frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{2} \end{array} \right. \quad \left( \begin{array}{l} \hat{a} \equiv \hat{x}_1 + i\hat{x}_2 \\ \hat{a}^\dagger \equiv \hat{x}_1 - i\hat{x}_2 \end{array} \right)$$

$\hat{x}_1, \hat{x}_2$ (直交位相振幅演算子)を用いて書き直すと、

$$\hat{E}_x(r,t) = 2\varepsilon[\hat{x}_1 \cos(\omega t - kr) - \hat{x}_2 \sin(\omega t - kr)]$$

交換関係 $[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = \frac{i}{2}$  ( $\because [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ )  $\Delta x_1 \Delta x_2 \geq \frac{1}{4}$



# 発表の流れ

## 予備知識

- バックアクション回避測定
- 直交位相振幅
- **ホモダイン検出**
- パラメトリック増幅
- パラメトリック増幅を用いた  
バックアクション回避測定

## 実験について

- 実験系
- 実験方法
- 実験結果

## まとめ

# ホモダイン検出

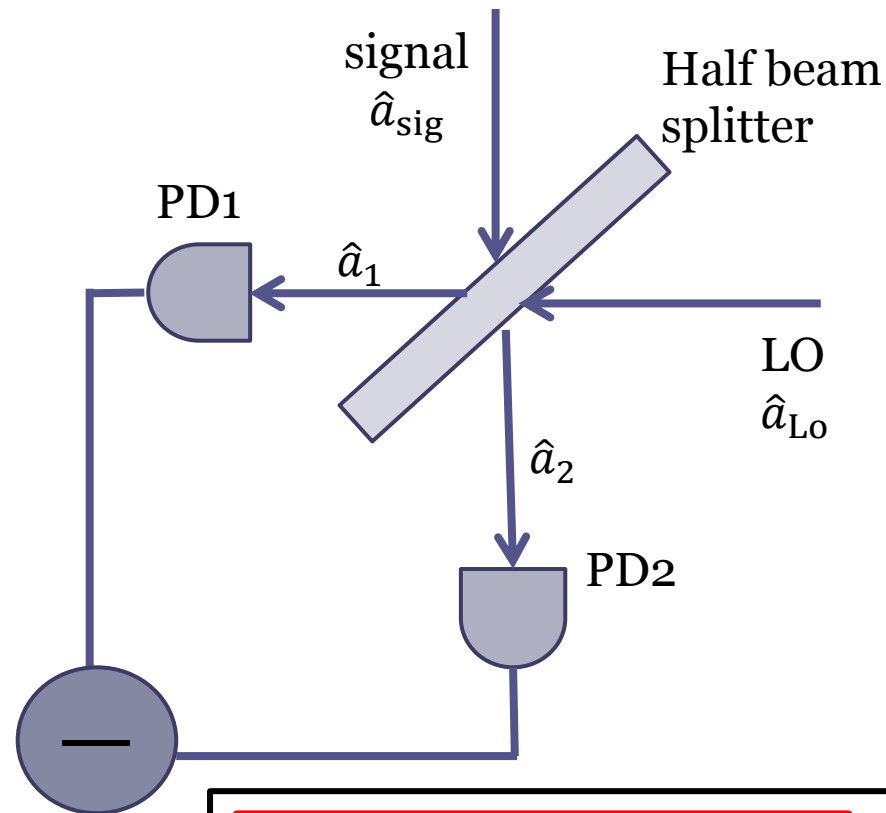
$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{\text{sig}} + \hat{a}_{\text{LO}}) \\ \hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{\text{sig}} - \hat{a}_{\text{LO}}) \end{cases}$$

$\hat{a}_1, \hat{a}_2$ : PD1, PD2への入射光

検出される差電子数 $\hat{n}_{12}$ は、

$$\begin{aligned} \hat{n}_{12} &= \hat{n}_1 - \hat{n}_2 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \\ &= \frac{1}{2}(\hat{a}_{\text{sig}}^\dagger + \hat{a}_{\text{LO}}^\dagger)(\hat{a}_{\text{sig}} + \hat{a}_{\text{LO}}) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\hat{a}_{\text{sig}}^\dagger - \hat{a}_{\text{LO}}^\dagger)(\hat{a}_{\text{sig}} - \hat{a}_{\text{LO}}) \\ &= (\hat{a}_{\text{LO}}^\dagger \hat{a}_{\text{sig}} + \hat{a}_{\text{sig}}^\dagger \hat{a}_{\text{LO}}) \end{aligned}$$

$\hat{a}_{\text{sig}} = \hat{x}_{1\text{sig}} + i\hat{x}_{2\text{sig}}$      $\hat{a}_{\text{LO}} = |\alpha_{\text{LO}}| e^{i\phi_{\text{LO}}}$  とすると  
( $\phi_{\text{LO}}$ : LO光の位相)



$\phi_{\text{LO}}$  を選び、 $\hat{x}_1, \hat{x}_2$  を測定

$$\phi_{\text{LO}} = 0 \quad \hat{n}_{12} = 2|\alpha_{\text{LO}}| \hat{x}_{1\text{sig}}$$

$$\phi_{\text{LO}} = \frac{1}{2}\pi \quad \hat{n}_{12} = 2|\alpha_{\text{LO}}| \hat{x}_{2\text{sig}}$$

$$\hat{n}_{12}(\phi_{\text{LO}}) = 2|\alpha_{\text{LO}}| (\hat{x}_{1\text{sig}} \cos \phi_{\text{LO}} + \hat{x}_{2\text{sig}} \sin \phi_{\text{LO}})$$

# 発表の流れ

## 予備知識

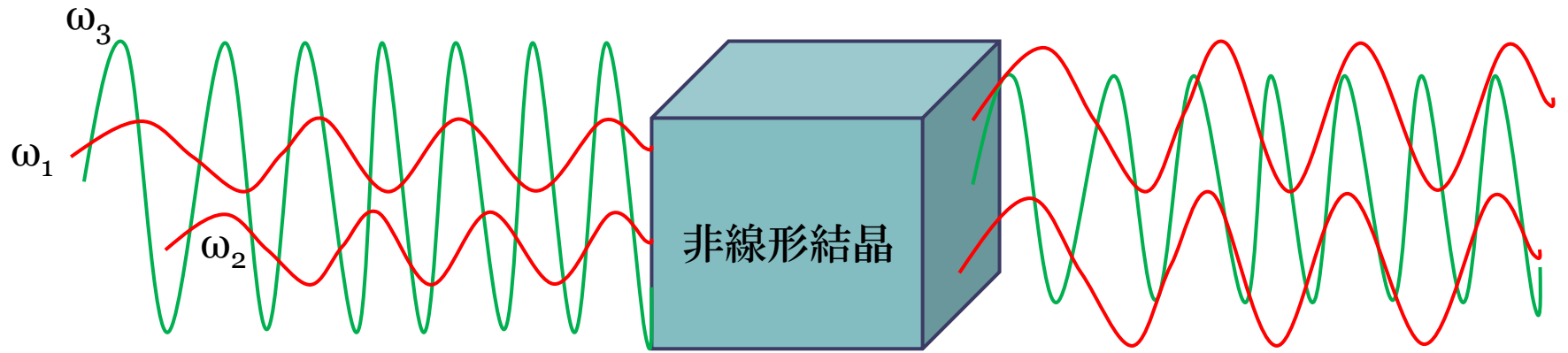
- バックアクション回避測定
- 直交位相振幅
- ホモダイン検出
- **パラメトリック増幅**
- パラメトリック増幅を用いた  
バックアクション回避測定

## 実験について

- 実験系
- 実験方法
- 実験結果

## まとめ

# パラメトリック増幅



$\omega_1$  : シグナル、 $\omega_2$  : アイドラー、 $\omega_3$  : ポンプ光

2次の非線形分極の起きる非線形結晶に角振動数  
 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\omega_3$ の光を入射( $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ )



$\omega_1$  と  $\omega_2$  と  $\omega_3$  の光の間で相互作用が起こる。

# 非線形分極を考慮した波動方程式

物質中のマクスウェル方程式で

非線形分極  $(P_{\text{NL}})_i = 2\varepsilon_0 d_{ijk}^{(2)} E_j E_k$  ( $i, j, k = x, y, z$ )

を考慮すると、以下の電磁波の波動方程式が得られる。

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}_{\text{NL}} + \mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

$\mu_0$ : 真空の透磁率、 $\varepsilon$ : 物質中の誘電率、 $\sigma$ : 電気伝導率

簡単のためz軸方向に伝播する平面電磁波を考える。

規格化した複素振幅 $A(z)$ を使って平面電磁波を次式のように表す。

$$E_l(z, t) = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\omega_l}{n_l}} A_l(z) \exp[i(\omega_l t - k_l z)] + c.c. \right\} (l=1,2,3)$$

( $n_l$ : 角振動数 $\omega_l$ における屈折率、 $k_l$ : 波数、c.c.: 複素共役)

$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ を満たす3つの角振動数の複素振幅 $A_l(z)$ に関する一階の連立微分方程式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_1}{dz} = -\frac{\alpha_1}{2} A_1 - i\beta A_2^* A_3 e^{-i\Delta k z} \\ \frac{dA_2}{dz} = -\frac{\alpha_2}{2} A_2 - i\beta A_1^* A_3 e^{-i\Delta k z} \\ \frac{dA_3}{dz} = -\frac{\alpha_3}{2} A_3 - i\beta A_1 A_2 e^{i\Delta k z} \end{array} \right. \left( \begin{array}{l} \alpha_1 = \sigma_1 \frac{\omega_1 \mu_0}{k_1} = \sigma_1 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}} \\ \beta = \frac{d^{(2)}}{2c} \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{n_1 n_2 n_3}} \\ \Delta k = k_3 - k_2 - k_1 \end{array} \right)$$

( $\mu_0$ : 真空の透磁率、 $\epsilon$ : 物質中の誘電率、 $\sigma$ : 電気伝導率)



$|A_3| \gg |A_1|, |A_2|$  のとき  $A_3(z)$  は  $z$  によらず一定という近似が成り立ち、解は次のように解ける。

$$\begin{cases} A_1(z) = A_1(0) \cosh(gz) - A_2^*(0) e^{i\varphi} \sinh(gz) \\ A_2^*(z) = A_2^*(0) \cosh(gz) - A_1^*(0) e^{i\varphi} \sinh(gz) \end{cases} \quad (g \exp(i\varphi) = i\beta A_3, g > 0)$$

$$A_1(z) = \hat{b}_{\text{sig}}, A_1(0) = \hat{a}_{\text{sig}}, A_2^*(z) = \hat{b}_{\text{id}}^\dagger, A_2^*(0) = \hat{a}_{\text{id}}^\dagger$$

$$G = \cosh(gz), (\cosh(gz))^2 - (\sinh(gz))^2 = 1 \quad \text{として}$$

$$\begin{cases} \hat{b}_{\text{sig}} = G \hat{a}_{\text{sig}} + \sqrt{G^2 - 1} \hat{a}_{\text{id}}^\dagger \\ \hat{b}_{\text{id}} = \sqrt{G^2 - 1} \hat{a}_{\text{sig}}^\dagger + G \hat{a}_{\text{id}} \end{cases}$$

が得られる。

# 発表の流れ

## 予備知識

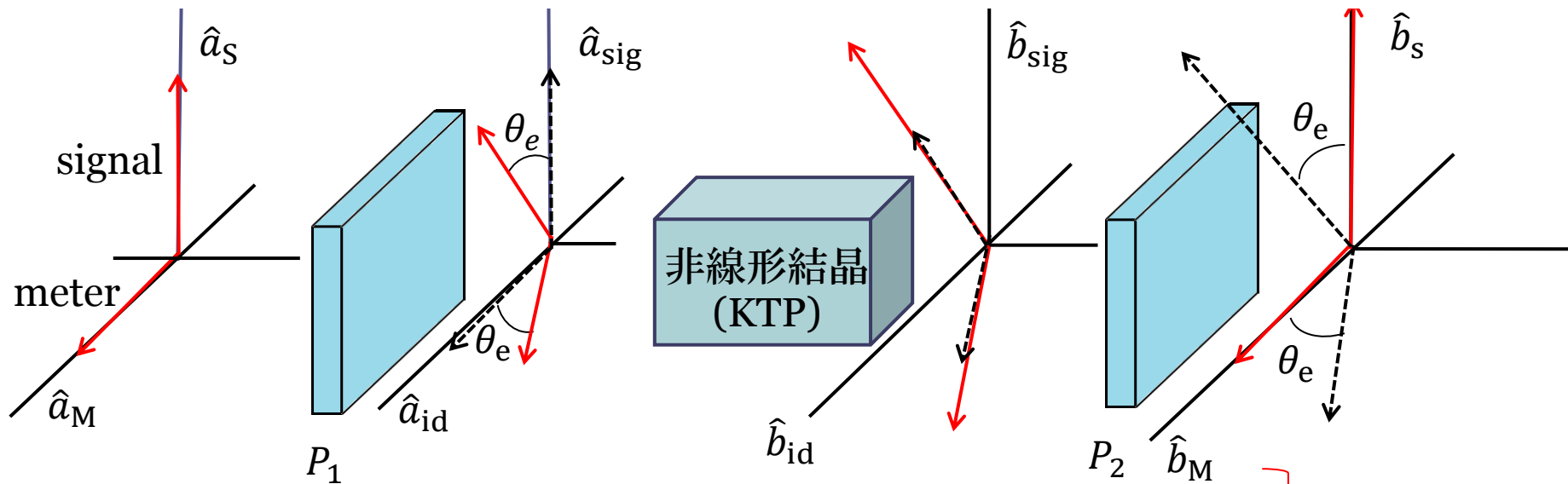
- バックアクション回避測定
- 直交位相振幅
- ホモダイン検出
- パラメトリック増幅
- **パラメトリック増幅を用いた  
バックアクション回避測定**

## 実験について

- 実験系
- 実験方法
- 実験結果

## まとめ

# パラメトリック増幅を用いたバックアクション回避測定



(半波長板  $P_1$ )

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{sig} \\ \hat{a}_{id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_s \\ \hat{a}_M \end{pmatrix}$$

(パラメトリック増幅)

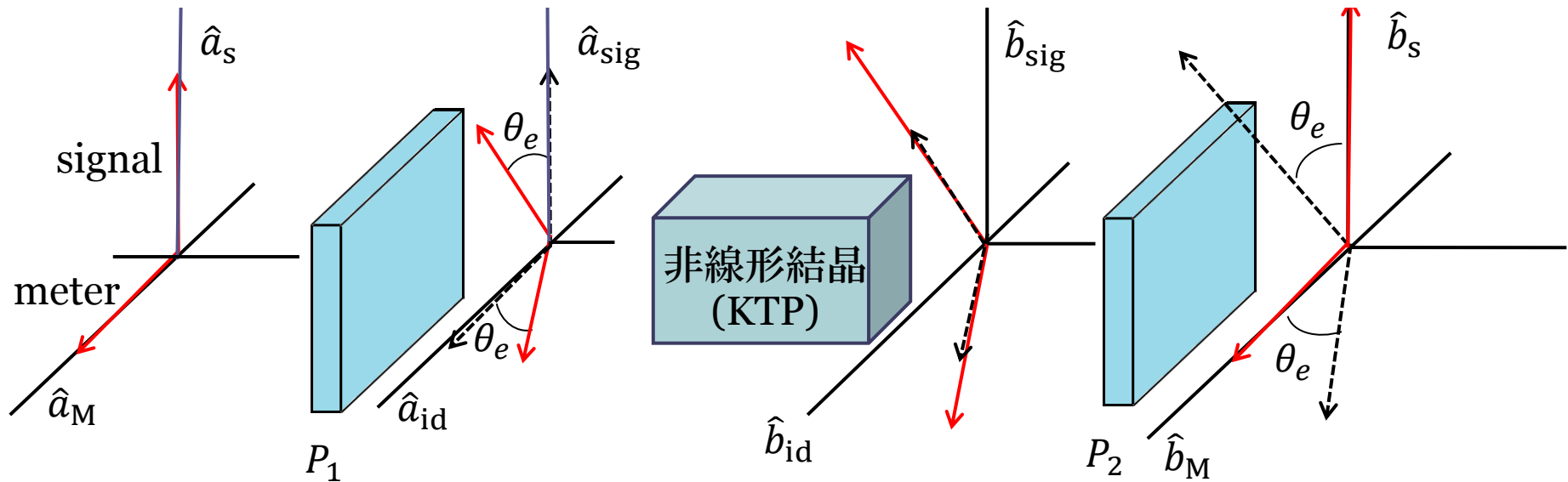
$$\begin{aligned} \hat{b}_{sig} &= G\hat{a}_{sig} + \sqrt{G^2 - 1}\hat{a}_{id} \\ \hat{b}_{id} &= \sqrt{G^2 - 1}\hat{a}_{sig}^\dagger + G\hat{a}_{id} \end{aligned}$$

(半波長板  $P_2$ )

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_s \\ \hat{b}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_{sig} \\ \hat{b}_{id} \end{pmatrix}$$

$\hat{b}_s, \hat{b}_M$  を  
 $\hat{a}_s, \hat{a}_M$  で  
表すと

# パラメトリック増幅を用いたバックアクション回避測定



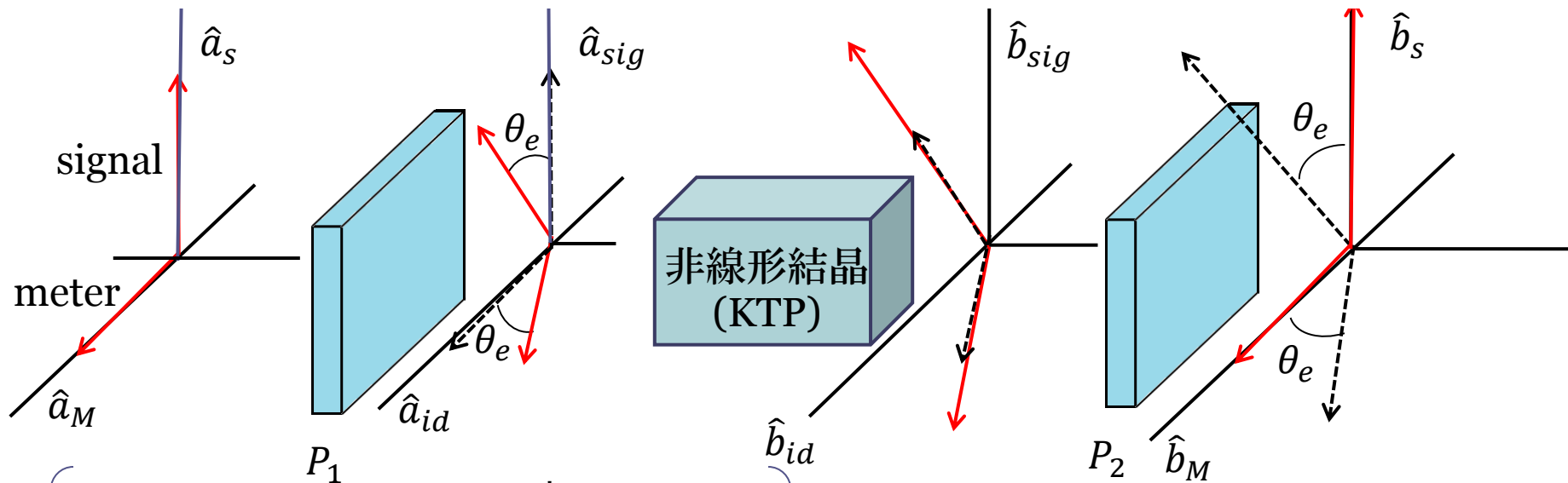
$$\begin{pmatrix} \hat{b}_s \\ \hat{b}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2K^2 - 1)G\hat{a}_s - 2K\sqrt{1 - K^2}G\hat{a}_M + \sqrt{G^2 - 1}\hat{a}_M^\dagger \\ 2K\sqrt{1 - K^2}G\hat{a}_s + (2K^2 - 1)G\hat{a}_M + \sqrt{G^2 - 1}\hat{a}_s^\dagger \end{pmatrix}$$

$$K = \cos \theta \text{ において } \theta_e = \cos^{-1} \left[ \sqrt{\frac{G+1}{2G}} \right] \text{ のとき } \left( G = \frac{1}{(2K^2 - 1)} \text{ のとき} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{a}_s + \sqrt{G^2 - 1}(\hat{a}_M^\dagger - \hat{a}_M) \\ \hat{a}_M + \sqrt{G^2 - 1}(\hat{a}_s + \hat{a}_s^\dagger) \end{pmatrix}$$

この時の角度を  $\theta_e$ : evasion angle という。

# パラメトリック増幅を用いたバックアクション回避測定



$$\begin{pmatrix} \hat{b}_s \\ \hat{b}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_s + \sqrt{G^2 - 1}(\hat{a}_M^\dagger - \hat{a}_M) \\ \hat{a}_M + \sqrt{G^2 - 1}(\hat{a}_s + \hat{a}_s^\dagger) \end{pmatrix}$$

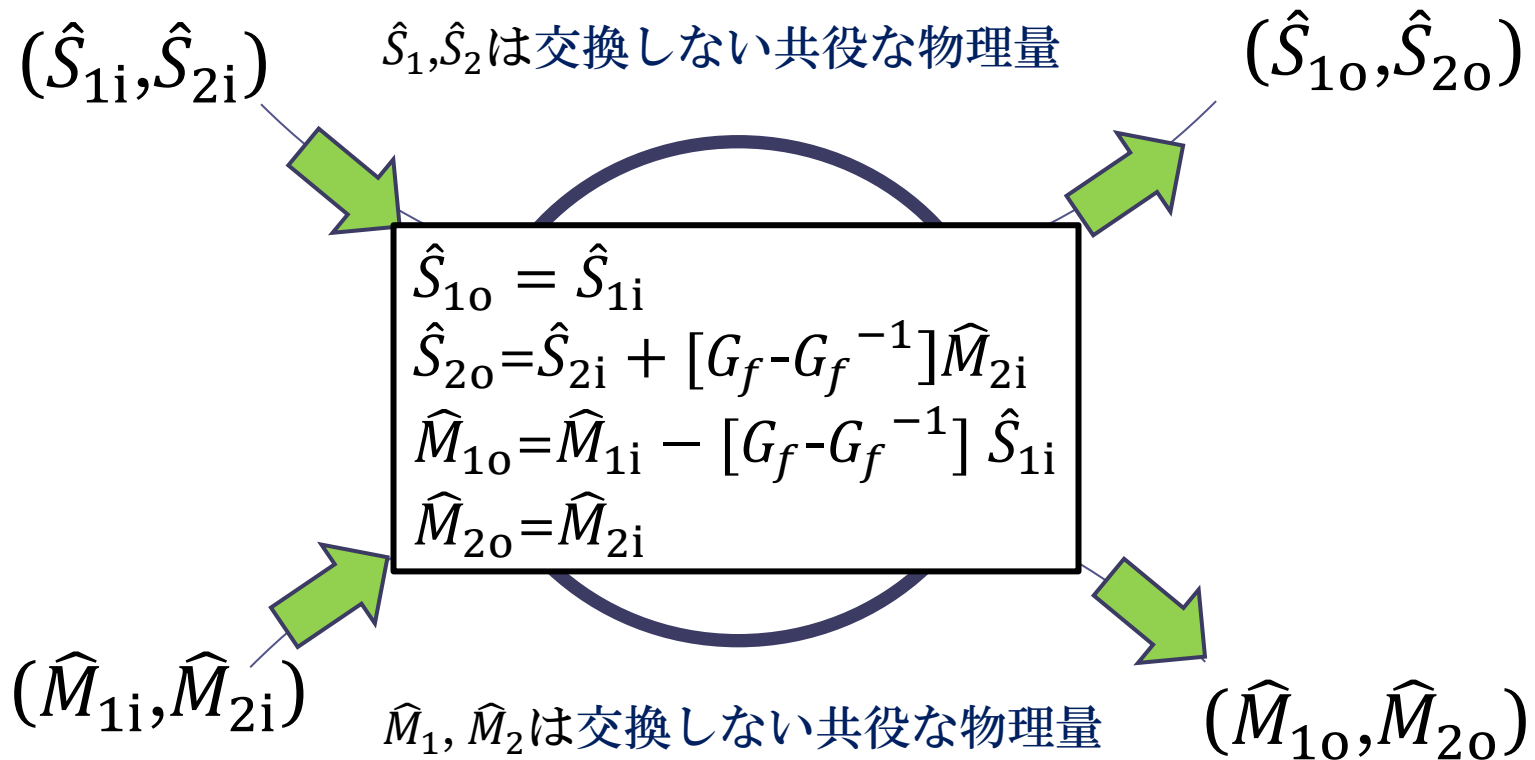
$$\hat{S}_{10} = \frac{\hat{b}_s + \hat{b}_s^\dagger}{2}, \hat{S}_{20} = \frac{\hat{b}_s - \hat{b}_s^\dagger}{2i}, \hat{M}_{10} = \frac{\hat{b}_M + \hat{b}_M^\dagger}{2}, \hat{M}_{20} = \frac{\hat{b}_M - \hat{b}_M^\dagger}{2i}$$

を計算して各直交位相振幅を求めると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{S}_{10} &= \hat{S}_{1i} \\ \hat{S}_{20} &= \hat{S}_{2i} + [G_f - G_f^{-1}] \hat{M}_{2i} \\ \hat{M}_{10} &= \hat{M}_{1i} - [G_f - G_f^{-1}] \hat{S}_{1i} \\ \hat{M}_{20} &= \hat{M}_{2i} \end{aligned}$$

$$(G_f = G + \sqrt{G^2 - 1})$$

# バックアクション回避測定



- $\hat{M}_{1o}$  を測定し  $\hat{S}_{1i}$  についての情報を得る。
- 測定の影響は  $\hat{S}_{2o}$  のみに出る。

(本論文で測定する物理量: 光の直交位相振幅)

# 実験について

この4つの等式の意味することが  
実験で実現されるかを検証します。

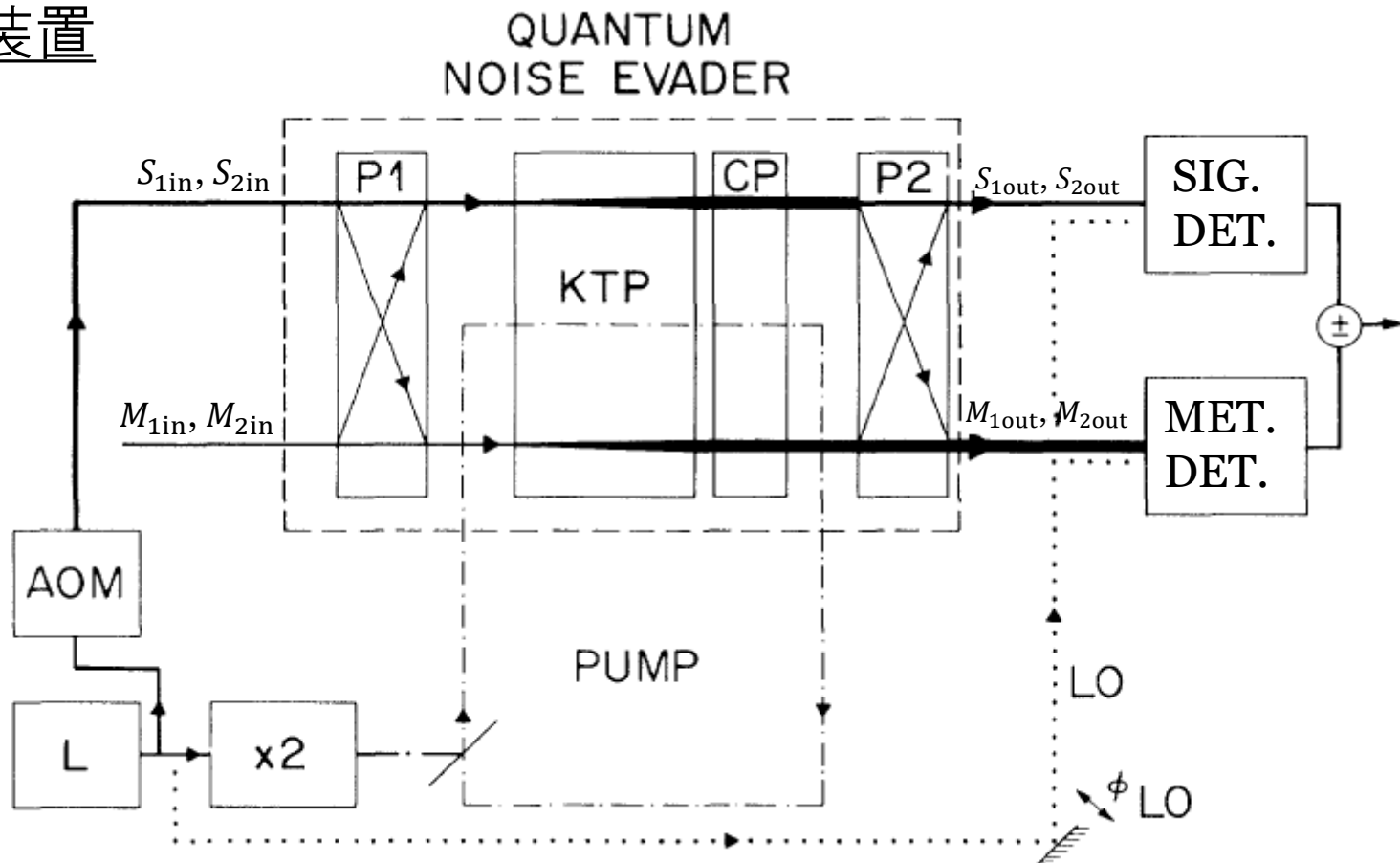
$$\hat{S}_{10} = \hat{S}_{1i}$$

$$\hat{S}_{20} = \hat{S}_{2i} + [G_f - G_f^{-1}] \hat{M}_{2i}$$

$$\hat{M}_{10} = \hat{M}_{1i} - [G_f - G_f^{-1}] \hat{S}_{1i}$$

$$\hat{M}_{20} = \hat{M}_{2i}$$

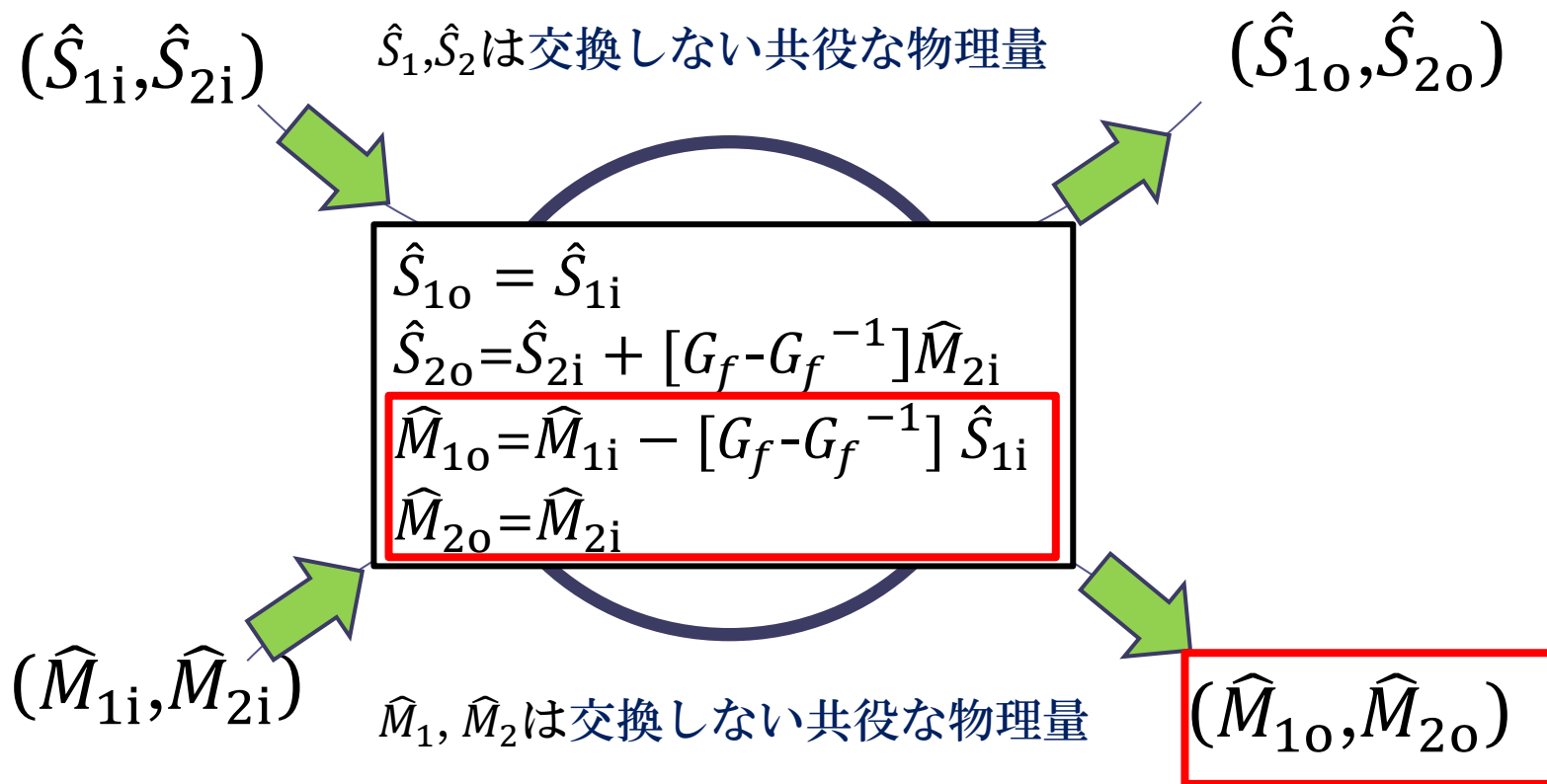
## 実験装置



- $0.532\mu\text{m}$ の波長のポンプ光を用いた
- Signalはacousto-optic-modulatorにより65MHzシフト
- 測定された利得 $G_f$ は1.33、 $\theta_e=8^\circ$



# 実験1:メーターによるシグナルの読み出しを検証

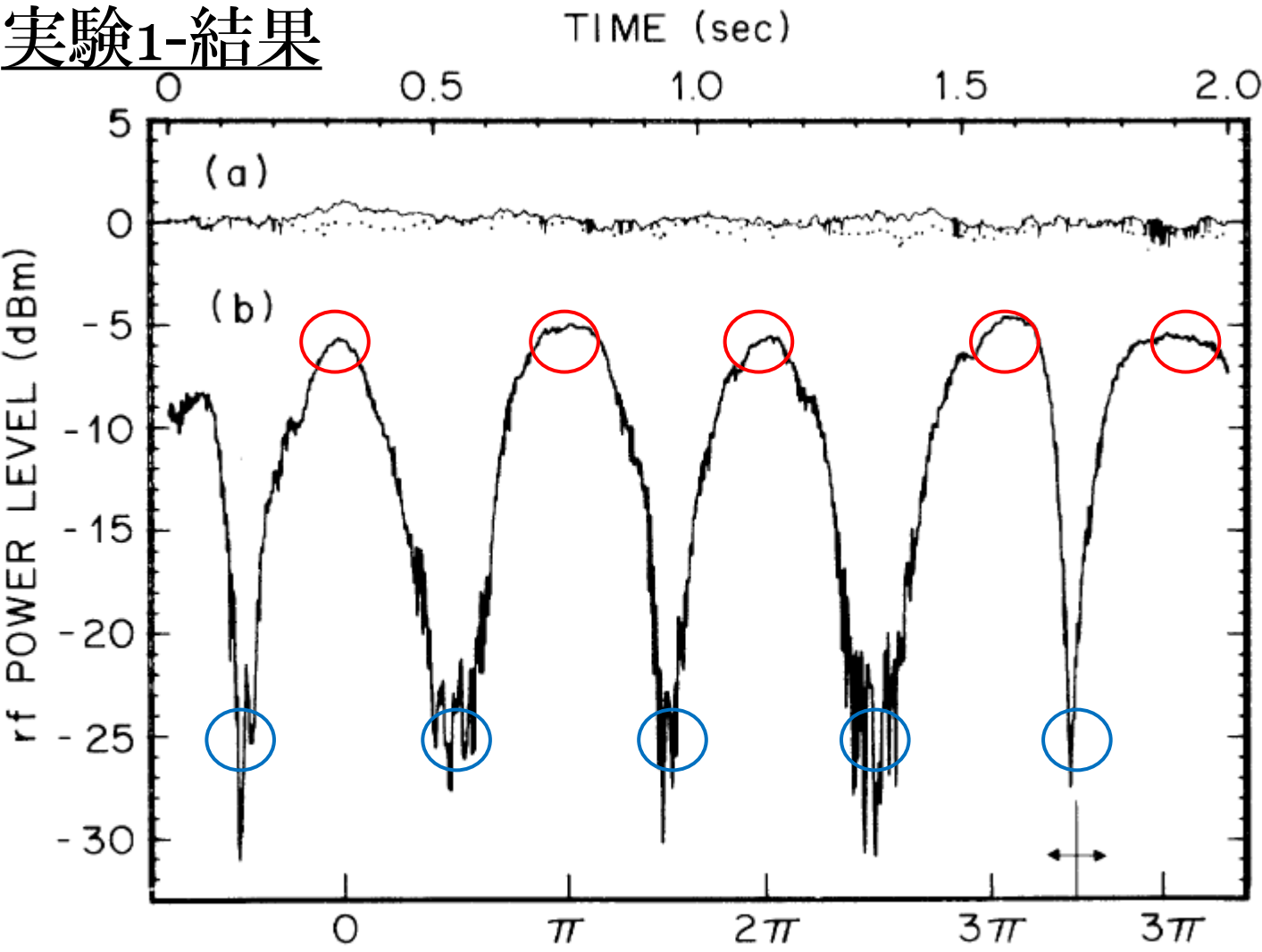


meterをホモダイン検出

$\phi_{LO} = 0, \pm\pi, \pm 2\pi \dots$   $\hat{M}_{10}$ :  $\hat{S}_{1i}$ の情報を含む

$\phi_{LO} = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2} \dots$ :  $\hat{M}_{20}$ :  $\hat{S}_{1i}$ の情報を含まない

# 実験1-結果



(a)  
ドット:signal-in  
実線:signal-out  
に相当。

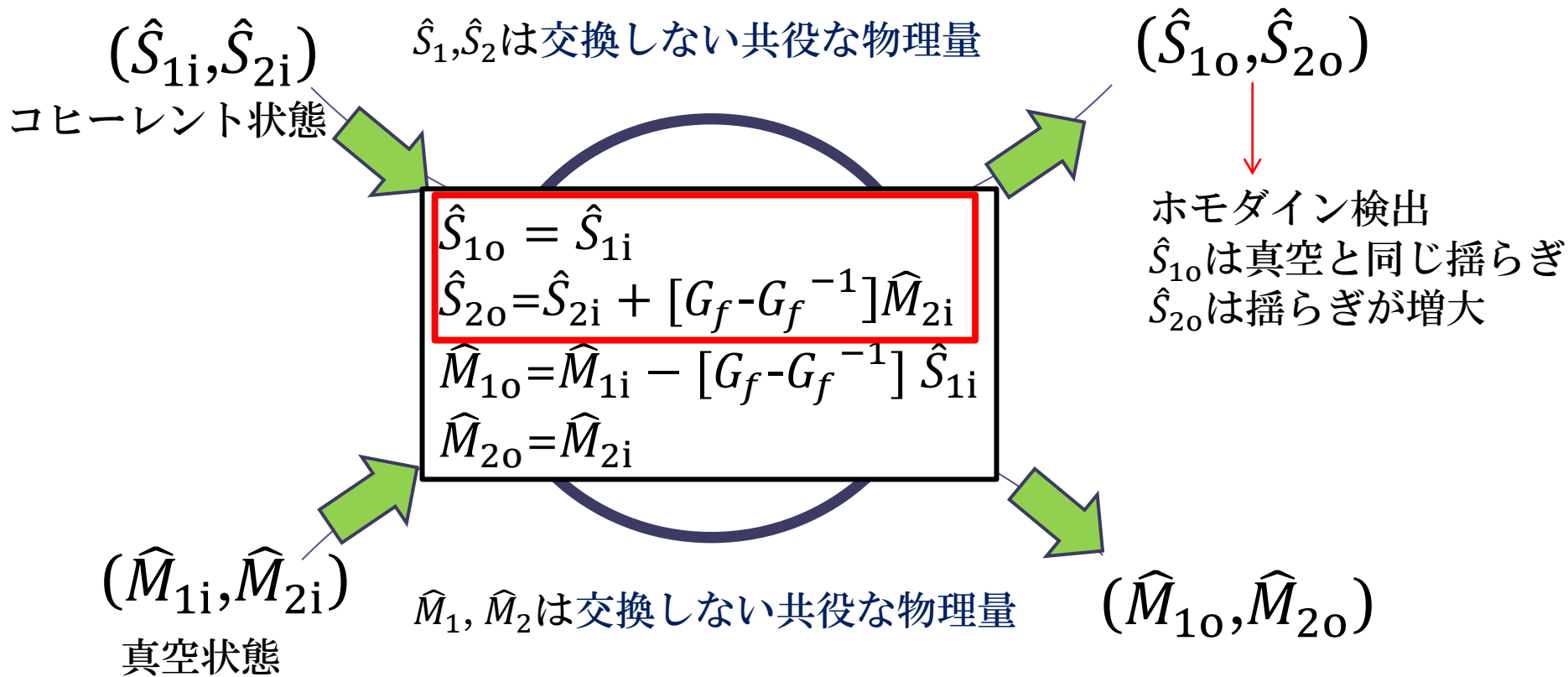
(b)  
Meter-out

Fig.2 OPTICAL PHASE  $\phi_{LO}$

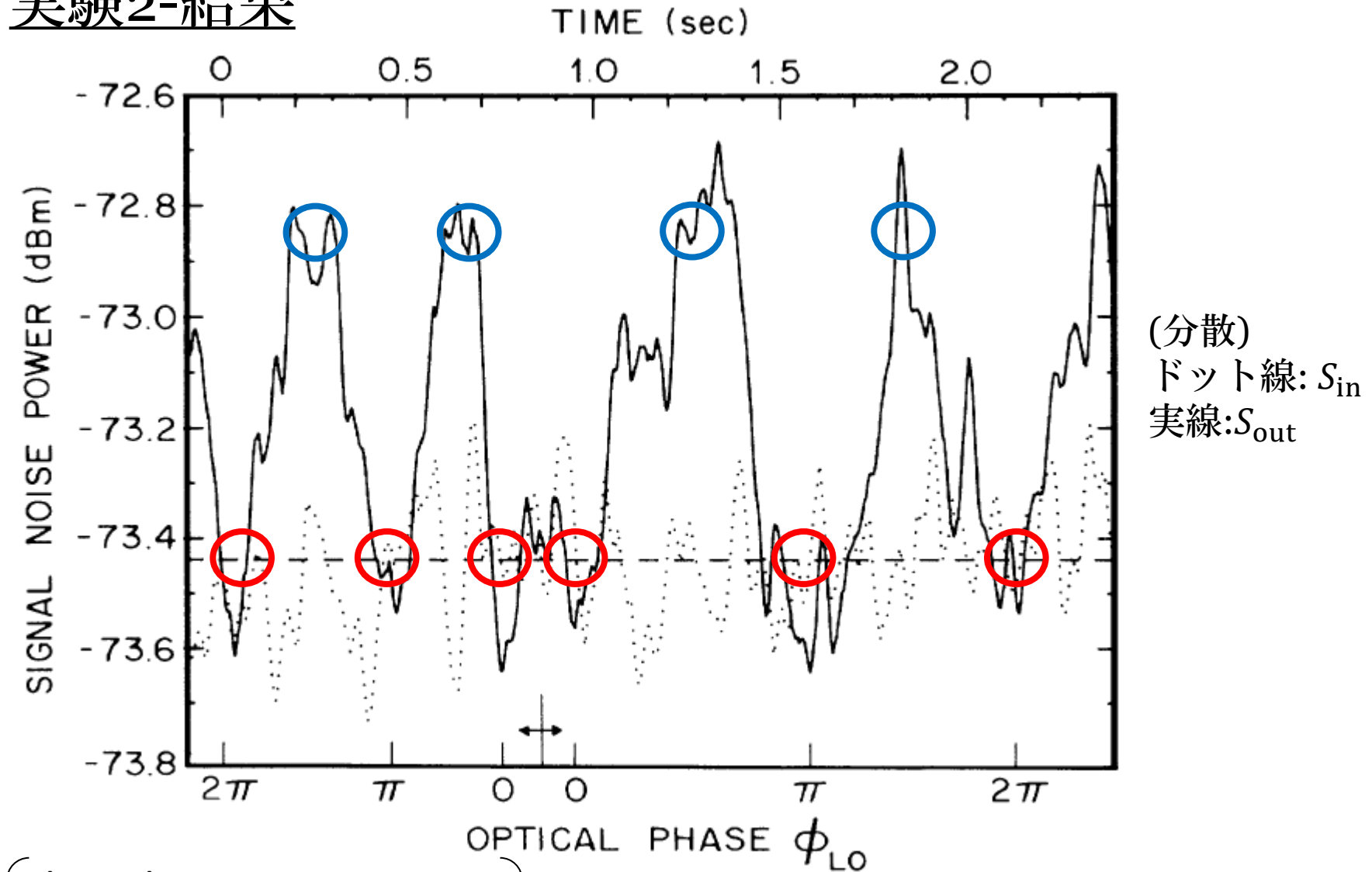
$$\left( \begin{array}{l} \hat{M}_{10} = \hat{M}_{1i} - [G_f - G_f^{-1}] \hat{S}_{1i} \dots (3) \\ \hat{M}_{20} = \hat{M}_{2i} \dots (4) \end{array} \right)$$

$\hat{M}_1$ を測定した時、 $\hat{S}_1$ の値が  
乗っていることが見て取れる。

# 実験2: $\hat{S}_1$ は測定の影響を受けず、 $\hat{S}_2$ は影響を受ける



# 実験2-結果



$$\begin{cases} \hat{S}_{10} = \hat{S}_{1i} & (1) \\ \hat{S}_{20} = \hat{S}_{2i} + (G_f - G_f^{-1}) \hat{M}_{2i} & (2) \end{cases}$$

$S_{out}$  は、 $S_{10}$  では方程式(1)より状態は保たれ、  
 $S_{20}$  ではBack Actionが載ることが方程式(2)から分かる。

# 実験3: $\hat{S}_{10}$ と $\hat{M}_{10}$ の相関を検証

$(\hat{S}_{1i}, \hat{S}_{2i})$

$\hat{S}_1, \hat{S}_2$  は交換しない共役な物理量

$(\hat{S}_{10}, \hat{S}_{20})$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{10} &= \hat{S}_{1i} \\ \hat{S}_{20} &= \hat{S}_{2i} + [G_f - G_f^{-1}] \hat{M}_{2i} \\ \hat{M}_{10} &= \hat{M}_{1i} - [G_f - G_f^{-1}] \hat{S}_{1i} \\ \hat{M}_{20} &= \hat{M}_{2i} \end{aligned}$$

$(\hat{M}_{1i}, \hat{M}_{2i})$

$\hat{M}_1, \hat{M}_2$  は交換しない共役な物理量

$(\hat{M}_{10}, \hat{M}_{20})$

和の揺らぎを測定

パラメトリック増幅on

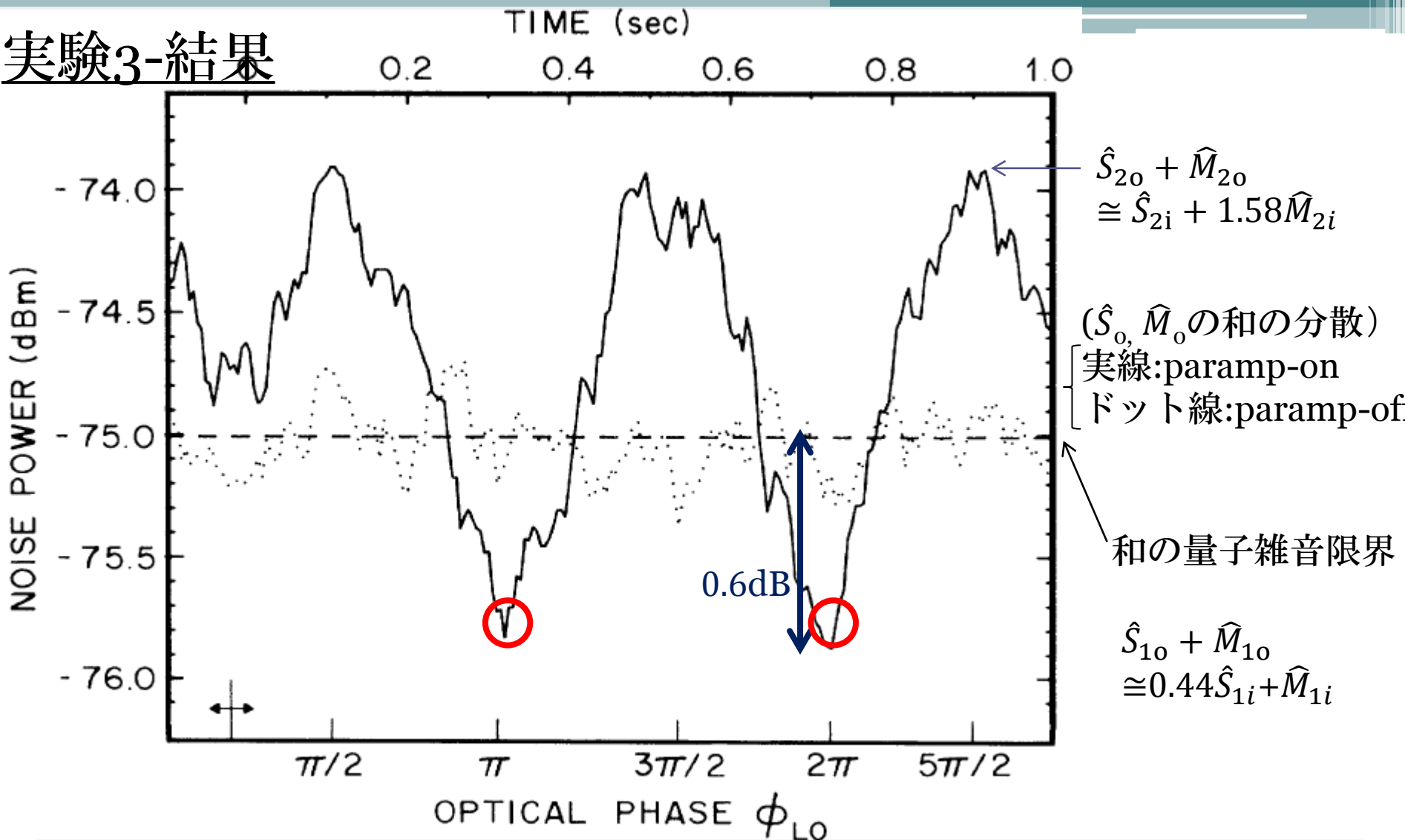
$$\begin{aligned} \hat{S}_{10} + \hat{M}_{10} &= \hat{S}_{1i} + \hat{M}_{1i} - [G_f - G_f^{-1}] \hat{S}_{1i} \\ &= (1 - G_f + G_f^{-1}) \hat{S}_{1i} + \hat{M}_{1i} \\ &\cong 0.42 \hat{S}_{1i} + \hat{M}_{1i} \end{aligned}$$

パラメトリック増幅off

$$\hat{S}_{10} + \hat{M}_{10} = \hat{S}_{1i} + \hat{M}_{1i}$$

onのときの方が  
揺らぎ減少するはず

# 実験3-結果



$\hat{S}_{10}$ と $\hat{M}_{10}$ の和の分散が小さい
 
 $\hat{M}_{10}$ を用いて $\hat{S}_{10}$ について精度良く知ることができる。

(Sig+Met 揺らぎ小)

# まとめ

- パラメトリック増幅を用いて初めてバックアクション回避測定を行った。
- 実験1  $\hat{M}_{10}$ から $\hat{S}_{1i}$ の情報を得られることを確認した。
- 実験2 測定バックアクションは $\hat{S}_{20}$ にだけ乗る。
- 実験3  $\hat{S}_{10}$ と $\hat{M}_{10}$ の和の分散が量子雑音限界より0.6dB低い。
- 3つの結果から実験的にバックアクション回避測定が可能であることが確認された

$$\hat{S}_{10} = \hat{S}_{1i}$$

$$\hat{S}_{20} = \hat{S}_{2i} + [G_f - G_f^{-1}] \hat{M}_{2i}$$

$$\hat{M}_{10} = \hat{M}_{1i} - [G_f - G_f^{-1}] \hat{S}_{1i}$$

$$\hat{M}_{20} = \hat{M}_{2i}$$