

## 付録 M 磁気トラップに関するいくつかの有用な式

### M. 1 電流の作る磁場

電流  $I$  の流れている任意の回路  $C$  が位置  $\mathbf{r}$  作る磁場  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  は、以下で与えられる（ビオ・サバールの公式）：

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (\text{M.1})$$

ここで、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{H/m}]$  は、真空の透磁率である。

式 (M.1) を、 $z$  軸に平行で、円筒座標上  $\rho = S, \phi = \alpha$  にある無限に長い導線の場合に適用すると、 $B_z = 0$ 、その他の成分は、

$$B_\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{S \sin(\phi - \alpha)}{[S^2 + \rho^2 - 2S\rho \cos(\phi - \alpha)]} \quad (\text{M.2})$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{S \cos(\phi - \alpha) - \rho}{[S^2 + \rho^2 - 2D\rho \cos(\phi - \alpha)]} \quad (\text{M.3})$$

となる[80]。特に  $\rho = 0$  の場合、 $B_z = B_\rho = 0, B_\phi = \mu_0 I / 2\pi\rho$  となる。

次に、 $z = A$  平面上にある半径  $R$  のコイルを考える。コイルの中心が円筒座標上  $\rho = 0$  にあるとすると、 $B_\phi = 0$ 、その他の成分は、

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{[(R + \rho)^2 + (z - A)^2]^{1/2}} \times \left[ K(k^2) + \frac{R^2 - \rho^2 - (z - A)^2}{(R - \rho)^2 + (z - A)^2} E(k^2) \right] \quad (\text{M.4})$$

$$B_\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z - A}{[(R + \rho)^2 + (z - A)^2]^{1/2}} \times \left[ -K(k^2) + \frac{R^2 + \rho^2 + (z - A)^2}{(R - \rho)^2 + (z - A)^2} E(k^2) \right] \quad (\text{M.5})$$

となる[80]。ここで  $K(k^2), E(k^2)$  は、それぞれ第一種、第二種楕円積分\*であり、 $k^2$

---

\*  $K(k^2) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$ ,  $E(k^2) \equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi$

(argument) は以下で定義される：

$$k^2 = \frac{4R\rho}{(R+\rho)^2 + (z-A)^2} . \quad (\text{M.6})$$

特に  $\rho=0$  の場合,  $K(0)=E(0)=\pi/2$  となり,  $B_\rho=0$ ,  $B_z$  は,

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{[R^2 + (z-A)^2]^{3/2}} \quad (\text{M.7})$$

となる. 式 (M.7) の  $z$  方向の 1 階微分 (gradient) と 2 階微分 (curvature) は, それぞれ以下のようになる：

$$\frac{dB_z}{dz} = -\frac{3\mu_0 IR^2(z-A)}{2[R^2 + (z-A)^2]^{5/2}} \quad (\text{M.8})$$

$$\frac{d^2B_z}{dz^2} = -\frac{3\mu_0 IR^2}{2[R^2 + (z-A)^2]^{5/2}} \left\{ 1 - 5 \frac{(z-A)^2}{R^2 + (z-A)^2} \right\} . \quad (\text{M.9})$$

今, 二つのコイルを  $z=\pm A$  に置き, 同じ向きに電流  $I$  を流したとする. このとき, 式 (M.8), (M.9) より,  $A=R/2$  とおけば  $z=0$  で  $B_z' = B_z'' = 0$  となることがわかる. このようなコイル配置は, **ヘルムホルツ配置** (Helmholtz configuration) と呼ばれ, なるべく一様な磁場を生成したいときに用いる.

## M. 2 ヨッフエ・プリチャード型磁場

$z$  軸に対して軸対称な磁場  $\mathbf{B}_{\text{axial}}$  を考える. この磁場の  $z$  軸上における  $z$  成分  $B_z(0, 0, z)$  が  $z=0$  で極小値  $B_0 > 0$  を持つとする.  $z=0$  の近傍では,  $B_z(0, 0, z)$  は調和型, つまり  $B_z(0, 0, z) = B_0 + B_z'' z^2 / 2$  と近似することができ, このとき  $\mathbf{B}_{\text{axial}}$  は  $\nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{axial}} = 0$ ,  $\nabla^2 \mathbf{B}_{\text{axial}} = \mathbf{0}$  \*, および  $z$  軸に関する軸対称性より

---

\* 電場および電流の存在しない場合, 磁場に関するマクスウェル方程式は  $\nabla \times \mathbf{B} = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  となる. 一方, ベクトル演算子の公式より,  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$  が成り立つ. よって  $\nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{0}$  が成立する.

$$\mathbf{B}_{\text{axial}} = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{B_z''}{2} \begin{pmatrix} -xz \\ -yz \\ z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \quad (\text{M.10})$$

と表すことができる. この磁場に,  $z$  軸方向に成分を持たない次の四重極磁場

$$\mathbf{B}_{\text{radial}} = B_\rho' \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{M.11})$$

を加えると, 磁場の大きさが原点 ( $x = y = z = 0$ ) において極小値  $B_0$  を持つ**ヨッフエ・プリチヤード (IP: Ioffe-Pritchard) 型**と呼ばれる磁場  $\mathbf{B}_{IP}$  が得られる [79,80] :

$$\mathbf{B}_{IP} = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + B_\rho' \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{B_z''}{2} \begin{pmatrix} -xz \\ -yz \\ z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \quad (\text{M.12})$$

実際,  $B_0 \gg B_\rho' \rho$  ( $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ ) のとき,  $|\mathbf{B}_{IP}|$  は次のように近似できる :

$$|\mathbf{B}_{IP}| \cong \frac{1}{2} [B_\rho'' \rho^2 + B_z'' z^2] \quad (\text{M.13})$$

ただし,

$$B_\rho'' = \frac{B_\rho'^2}{B_0} - \frac{B_z''}{2}. \quad (\text{M.14})$$

このように, 原点付近における IP 型磁場の大きさは,  $z$  軸を回転対称軸とする非等方的な 3次元調和型となる.

### M. 3 ヨッフエ・プリチャードトラップ

全スピン ( $\mathbf{F} = \mathbf{S} + \mathbf{L} + \mathbf{I}$ ) の大きさが  $F$  である原子は、磁場  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  に置かれると、スピンに付随する磁気モーメントと磁場との相互作用により、そのエネルギーは以下のゼーマンシフト  $\Delta E(\mathbf{r})$  を受ける\* :

$$\Delta E(\mathbf{r}) = g_F m_F \mu_B |\mathbf{B}(\mathbf{r})| \quad (\text{M.15})$$

ここで、 $g_F$  はランダウの  $g$ -因子 (付録 H, 式 (H.10)),  $m_F$  は磁場の方向を量子化軸とした磁気量子数,  $\mu_B \cong 1.4[\text{MHz/G}]$  はボーア磁子である. このゼーマンシフトにより、特定の磁気量子数を持つ原子は磁場の極小点にトラップすることができる\*\*. 例えば、式 (M.13) の IP 型磁場中に置かれた原子は、 $g_F m_F > 0$  なら以下の非等方的 3 次元調和ポテンシャルに閉じ込めることができる (ヨッフエ・プリチャード(IP)トラップ) :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} g_F m_F \mu_B [B_\rho'' \rho^2 + B_z'' z^2]. \quad (\text{M.16})$$

$^{87}\text{Rb}$  の場合、スピン状態  $|F, m_F\rangle = |2, +2\rangle$  なら  $g_F = 1/2$ ,  $|1, -1\rangle$  なら  $g_F = -1/2$  であり、どちらもトラップ可能 ( $g_F m_F > 0$ ) である.

式 (M.16) の非等方的 3 次元調和ポテンシャルに閉じ込められた原子の  $z$  軸 (axial) 方向の、および  $z$  軸と垂直な (radial) 方向の振動周波数  $\omega_z$ ,  $\omega_\rho$  は、

$$\omega_v = \sqrt{\frac{g_F m_F \mu_B B_v''}{m}} \quad (v = z, \rho) \quad (\text{M.17})$$

で与えられる. ここで  $m$  はトラップされた原子の質量である. 特に  $^{87}\text{Rb}$  の場合は、 $m = 87 \times 1.66 \times 10^{-27} [\text{kg}]$ ,  $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24} [\text{J/T}]$  より、

---

\* ここでは、原子が運動して磁場の向きが変わっても、(その磁場の方向を量子化軸とした) 磁気量子数  $m$  の値は変わらない (スピンが磁場の向きに断熱追従する) と仮定している. この仮定は、磁場の方向の変化率  $d\theta/dt$  が、ラーモア周波数  $\omega_{\text{Larmor}} = g_F m_F \mu_B |\mathbf{B}(\mathbf{r})| / \hbar$  より十分小さければ成立する. 逆に、この条件が満たされない場合、運動する原子の磁気量子数  $m$  の値は変化する (マヨラナ遷移).

\*\* しかし、パッシェン-バック効果が現れるような大きな磁場のもとでは、ゼーマンシフトが式 (M.15) のように線形に変化しなくなり、トラップできなくなることがある.  $^{87}\text{Rb} |1, -1\rangle$  の場合、それは 500 [G] 程度の磁場で起こる (付録 H, 図 H.1 参照).

$$\omega_\nu = 2\pi \times \begin{cases} 1.27\sqrt{B_\nu''[\text{G/cm}^2]} [\text{Hz}] & (|2,+2\rangle \text{の場合}) \\ 0.90\sqrt{B_\nu''[\text{G/cm}^2]} [\text{Hz}] & (|1,-1\rangle \text{の場合}) \end{cases} \quad (\text{M.18})$$

となる.

#### M. 4 重力による磁気トラップ中心のシフト

実際の磁気トラップでは、磁気トラップポテンシャルに重力によるリニアポテンシャルが加わる：

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m[\omega_\rho^2\rho^2 + \omega_z^2z^2] + mgz \quad . \quad (\text{M.19})$$

ここで、 $g$  は重力加速度で、東京では  $9.79763[\text{m/s}^2]$  (理科年表 1998 年版より) である。式 (M.19) を  $z$  に関して平方完成すると、

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_\rho^2\rho^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2\left(z + \frac{g}{\omega_z^2}\right)^2 - \frac{mg^2}{2\omega_z^2} \quad (\text{M.20})$$

となる。つまり、磁気トラップの中心 (ポテンシャルの極小点) は、

$$\Delta z = \frac{g}{\omega_z^2} \quad (\text{M.21})$$

だけ鉛直方向にシフトする。

