

付録 K 干渉計の出力粒子数揺らぎと位相感度

K. 1 干渉計の出力粒子数の揺らぎ

光干渉計であれ原子波干渉計であれ，干渉計の出力ポートで観測される粒子数 n が干渉計の出力信号に対応する．そして，一般に観測される粒子数には揺らぎ Δn が伴う．ここでは，入力状態が①粒子数状態（フォック状態），②コヒーレント状態の二つの場合について，この Δn を求める．その際，入力状態が時間発展するシュレーディンガー表示よりも，演算子が時間発展するハイゼンベルグ表示の方が便利である．そこで，まず図 K.1(a) のような透過率 T のビームスプリッターの動作をハイゼンベルグ表示で考える．ビームスプリッターの入力ポート a, b の消滅演算子を \hat{a}, \hat{b} とし，これらはボソンの交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ を満たすものとする．ここで考える粒子は，ボゾンであれば光子でも原子でもよい．出力ポート c, d のハイゼンベルグ表示における消滅演算子 \hat{c}, \hat{d} は，粒子間相互作用がなければ入力ポートの消滅演算子 \hat{a}, \hat{b} と以下の線形関係で結ばれる：

$$\begin{pmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{T} & -\sqrt{1-T} \\ \sqrt{1-T} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}. \quad (\text{K.1})$$

実際， \hat{c}, \hat{d} はボソンの交換関係を満足している：

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = [\sqrt{T}\hat{a} - \sqrt{1-T}\hat{b}, \sqrt{T}\hat{a}^\dagger - \sqrt{1-T}\hat{b}^\dagger] = T[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + (1-T)[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1 \quad (\text{K.2})$$

$$[\hat{d}, \hat{d}^\dagger] = [\sqrt{1-T}\hat{a} + \sqrt{T}\hat{b}, \sqrt{1-T}\hat{a}^\dagger + \sqrt{T}\hat{b}^\dagger] = (1-T)[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + T[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1. \quad (\text{K.3})$$

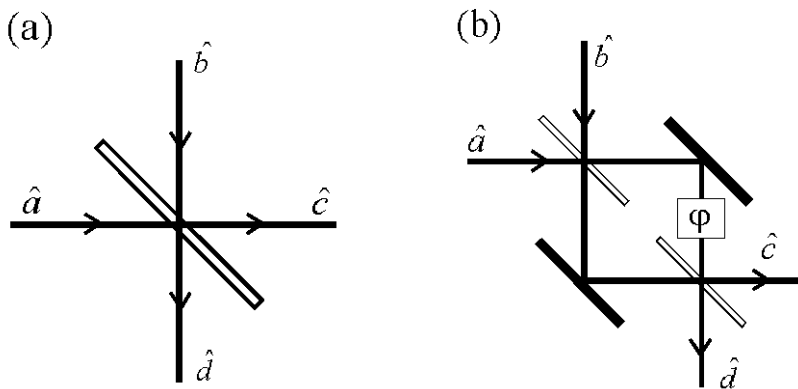


図 K.1 (a) 演算子によるビームスプリッターの定式化．出力ポートの消滅演算子 \hat{c}, \hat{d} は，入力ポートの演算子 \hat{a}, \hat{b} と線形関係 (K.1) で結ばれる．(b) マッハ・ツェンダー干渉計も，ビームスプリッターと同様に入出力ポートの消滅演算子を定義できる．

また、各ポートの粒子数演算子を $\hat{n}_x \equiv \hat{x}^\dagger \hat{x}$ ($x = a, b, c, d$) とし、出力ポートの粒子数の期待値を計算すると、

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_c \rangle &= \langle (\sqrt{T}\hat{a}^\dagger - \sqrt{1-T}\hat{b}^\dagger)(\sqrt{T}\hat{a} - \sqrt{1-T}\hat{b}) \rangle \\ &= T \langle \hat{n}_a \rangle - \sqrt{T(1-T)}(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}) + (1-T) \langle \hat{n}_b \rangle \end{aligned} \quad (\text{K.4})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_d \rangle &= \langle (\sqrt{1-T}\hat{a}^\dagger + \sqrt{T}\hat{b}^\dagger)(\sqrt{1-T}\hat{a} + \sqrt{T}\hat{b}) \rangle \\ &= (1-T) \langle \hat{n}_a \rangle + \sqrt{T(1-T)}(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}) + T \langle \hat{n}_b \rangle \end{aligned} \quad (\text{K.5})$$

となり、入力粒子数と出力粒子数の間には粒子数保存則

$$\langle \hat{n}_a \rangle + \langle \hat{n}_b \rangle = \langle \hat{n}_c \rangle + \langle \hat{n}_d \rangle \quad (\text{K.6})$$

が成立している。

上記の定式化は、そのまま図 K.1(b)のマッハ・ツェンダー干渉計に拡張できる。ビームスプリッターの場合と同様に入力ポートの消滅演算子を \hat{a}, \hat{b} 、出力ポートの消滅演算子を \hat{c}, \hat{d} とすると、これらの間には以下の関係式が成立する：

$$\begin{pmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -r \\ r & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \quad (\text{K.7})$$

ただし、

$$t = -\frac{1+e^{i\varphi}}{2}, r = -\frac{1-e^{i\varphi}}{2}. \quad (\text{K.8})$$

この干渉計は、位相差 φ に依存する透過率 $|t|^2$ ($=1-|r|^2$) を持つビームスプリッターとみなすことができる。実際 (K.7) で定義した \hat{c}, \hat{d} はボゾンの交換関係を満たし、 $|t|^2 + |r|^2 = 1$ より粒子数保存則 (K.6) も成立する。

ここで、干渉計の出力ポート c で観測される粒子数の期待値 $\langle \hat{n}_c \rangle$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_c \rangle &= \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle = \langle (t\hat{a} - r\hat{b})(t^* \hat{a}^\dagger - r^* \hat{b}^\dagger) \rangle \\ &= |t|^2 \langle \hat{n}_a \rangle + |r|^2 \langle \hat{n}_b \rangle - \langle tr^* \hat{a} \hat{b}^\dagger + t^* r \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle \end{aligned} \quad (\text{K.9})$$

となる．特に，入力ポート b が真空状態 $|0\rangle_b$ の場合， $\hat{b}|0\rangle_b=0$ ， $\hat{b}^\dagger|0\rangle_b=|1\rangle_b$ より式 (K.9) の右辺第2項および3項はゼロになり，

$$\langle \hat{n}_c \rangle = |t|^2 \langle \hat{n}_a \rangle = \langle \hat{n}_a \rangle \frac{1 + \cos \varphi}{2} \quad (\text{K.10})$$

となる．これが干渉計の出力信号となる．

次に，干渉計の出力ポート c で観測される粒子数の揺らぎ $\langle \Delta n_c \rangle$ を考える．ここでは各ポートの粒子数揺らぎ $\langle \Delta n_x \rangle$ を粒子数の分散 $\langle (\Delta n_x)^2 \rangle = \langle \hat{n}_x^2 \rangle - \langle \hat{n}_x \rangle^2$ の平方根で定義する（つまり $\langle \Delta n_x \rangle^2 = \langle (\Delta n_x)^2 \rangle$ ）．出力ポート d の粒子数の分散 $\langle (\Delta n_c)^2 \rangle$ を，入力ポート b が真空状態の場合について計算すると以下のようになる：

$$\begin{aligned} \langle (\Delta n_c)^2 \rangle &= \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle - \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle^2 \\ &= \langle \hat{c}^\dagger (\hat{c}^\dagger \hat{c} + 1) \hat{c} \rangle - |t|^4 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2 \\ &= \langle \hat{c}^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{c} \rangle + \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle - |t|^4 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2 \\ &= |t|^4 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle + |t|^2 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - |t|^4 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2 \\ &= |t|^4 \langle \hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger - 1) \hat{a} \rangle + |t|^2 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - |t|^4 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2 \\ &= |t|^4 (\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2) + |t|^2 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - |t|^4 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2 \\ &= |t|^4 \langle (\Delta n_a)^2 \rangle + |t|^2 |r|^2 \langle \hat{n}_a \rangle . \end{aligned} \quad (\text{K.11})$$

この結果を用いて，入力ポート a の状態が①粒子数状態，②コヒーレント状態の二つの場合について出力ポート c の粒子数の分散および揺らぎを具体的に計算すると，

①粒子数状態 $|N\rangle_a$ の場合

$$\langle \hat{n}_a \rangle = N, \quad \langle (\Delta n_a)^2 \rangle = \langle \hat{n}_a^2 \rangle - \langle \hat{n}_a \rangle^2 = N^2 - N^2 = 0 \text{ より,}$$

$$\langle (\Delta n_c)^2 \rangle = 0 + |t|^2 |r|^2 N = |r|^2 \langle \hat{n}_c \rangle = \frac{N}{4} \sin^2 \varphi \quad (\text{K.12})$$

$$\langle \Delta n_c \rangle = |r| \sqrt{\langle n_c \rangle} = \frac{\sqrt{N}}{2} |\sin \varphi| . \quad (\text{K.13})$$

②コヒーレント状態 $|\alpha\rangle_a$ の場合

$$\langle \hat{n}_a \rangle = |\alpha|^2, \quad \langle (\Delta n_a)^2 \rangle = \langle \hat{n}_a^2 \rangle - \langle \hat{n}_a \rangle^2 = (|\alpha|^4 + |\alpha|^2) - |\alpha|^4 = |\alpha|^2 \text{ より}$$

$$\langle (\Delta n_c)^2 \rangle = |t|^4 |\alpha|^2 + |t|^2 |r|^2 |\alpha|^2 = |t|^2 |\alpha|^2 = \langle \hat{n}_c \rangle \quad (\text{K.14})$$

$$\langle \Delta n_c \rangle = \sqrt{\langle \hat{n}_c \rangle} = \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| |\alpha| . \quad (\text{K.15})$$

このように、出力の平均値に対する揺らぎの比 $\langle \Delta n \rangle / \langle n \rangle$ は、入力が粒子数状態でもコヒーレント状態でも $1/\sqrt{\langle n \rangle}$ に比例する。粒子数の分散が平均値に等しくなるような揺らぎ ($\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle$) は一般に**ショット雑音**と呼ばれるが、入力がショット雑音を持つコヒーレント状態の場合、出力もショット雑音を持つことが式 (K.14) からわかる。一方、粒子数揺らぎがゼロである粒子数状態が入力の場合は、式 (K.12) より $\langle (\Delta n)^2 \rangle = |r|^2 \langle n \rangle$ ($0 \leq |r|^2 \leq 1$) であるので、ショット雑音以下の出力が得られる。

K.2 干渉計の位相感度

干渉計の位相感度を、干渉計が識別し得る最小の位相差 $\Delta\varphi$ と定義する。干渉計の出力としてポート c を用いるとすると、 $\Delta\varphi$ は以下のような式で表現できる：

$$\Delta\varphi = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \langle \hat{n}_c \rangle} \right| \langle \Delta n_c \rangle = \left| \frac{\partial \langle \hat{n}_c \rangle}{\partial \varphi} \right|^{-1} \langle \Delta n_c \rangle . \quad (\text{K.16})$$

式 (K.10) より $\frac{\partial \langle \hat{n}_c \rangle}{\partial \varphi} = \langle \hat{n}_a \rangle \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1 + \cos \varphi}{2} = -\frac{\langle \hat{n}_a \rangle}{2} \sin \varphi$ であるので、式 (K.16) は

$$\Delta\varphi = \frac{2 \langle \Delta n_c \rangle}{\langle \hat{n}_a \rangle |\sin \varphi|} \quad (\text{K.17})$$

と表せる。入力が粒子数状態 $|N\rangle_a$ の場合は、式 (K.13) より

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (\text{K.18})$$

となり、位相感度は φ の値に依らない。一方、入力がコヒーレント状態 $|\alpha\rangle_a$ の場合は、式 (K.15) より

$$\Delta\varphi = \frac{1}{|\alpha| |\sin(\varphi/2)|} \quad (\text{K.19})$$

となり、位相感度は φ に依存する。