

## 付録 J 光定在波による原子波の回折

### J.1 レーザー光が作る光定在波

$x=0$ にあるレーザー光源から  $+x$  方向へ進行する周波数  $\omega_1$ 、波数  $k_1$  のレーザー光を考える。このレーザー光の電場は、振幅の揺らぎを無視すると、

$$E_+(x,t) = E_0 \cos[k_1 x - \omega_1 t + \delta_1(t - x/c)] \quad (\text{J.1})$$

と表わせる。 $\delta_1(t)$  は光源の位置における電場の位相で、レーザーの持つ周波数の揺らぎを表現できるように時間依存性を持たせている。例えば、レーザーの線幅が  $2\pi \times 1$  [MHz] の場合、 $\delta_1(t)$  はその逆数である 160 ns の時定数（コヒーレンス時間）で  $2\pi$  程度変化する関数と考える。問題にする光学系のスケールがレーザー光のコヒーレンス長（コヒーレンス時間  $\times$  光速）より十分短いとすると\*、ある時刻における電場の位相差  $\delta_1(t - x/c)$  は空間的に一様とみなせる。このとき電場は近似的に

$$E_+(x,t) = E_0 \cos[k_1 x - \omega_1 t + \delta_1(t)] \quad (\text{J.2})$$

と表せる。以降、電場としてこの表現を採用する。同様に、 $-x$  方向へ進行するレーザー光の電場を、

$$E_-(x,t) = E_0 \cos[-k_2 x - \omega_2 t + \delta_2(t)] \quad (\text{J.3})$$

と表す。これら対向するレーザー光を重ね合わせてできる電場は

$$\begin{aligned} E(x,t) &= E_+(x,t) + E_-(x,t) \\ &= 2E_0 \cos\left[kx - \frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\delta_1(t) - \delta_2(t)}{2}\right] \cos\left[\omega t - \frac{\Delta k}{2}x - \frac{\delta_1(t) + \delta_2(t)}{2}\right] \end{aligned} \quad (\text{J.4})$$

となる。ここで  $k \equiv (k_1 + k_2)/2$ 、 $\Delta k \equiv (k_1 - k_2)/2$ 、 $\omega \equiv (\omega_1 + \omega_2)/2$ 、 $\Delta\omega \equiv (\omega_1 - \omega_2)/2$  と定義した。

レーザー光を単にミラーで折り返した場合は  $k_1 = k_2$ 、 $\omega_1 = \omega_2$ 、 $\delta_1(t) = \delta_2(t) \equiv \delta(t)$  であるので、

---

\* 本実験に用いる半導体レーザーの線幅は 1MHz 程度で、コヒーレンス長は 50m 程度になる。これは本実験の光学系の寸法 (<1m) に比べ十分長い。

$$E(x,t) = 2E_0 \cos kx \cos[\omega t - \delta(t)] \quad (\text{J.5})$$

となる。これは周期が  $\lambda/2$  ( $\lambda = 2\pi/k$ ) の光定在波を表す。注目すべきことは、例えレーザー光の位相  $\delta(t)$  が揺らいでも、定在波の腹と節の位置は揺らがないことである。このことは原子波に対して位置の安定した光格子を生成する上で非常に重要である。

対向するレーザー光の周波数が異なる場合は、式 (J.4) が

$$E(x,t) = 2E_0 \cos \left[ k \left( x - \frac{\Delta\omega}{2k} t \right) + \frac{\delta_1(t) - \delta_2(t)}{2} \right] \cos \left[ \omega t - \frac{\Delta k}{2} x - \frac{\delta_1(t) + \delta_2(t)}{2} \right] \quad (\text{J.6})$$

と書き表せることからわかるように、速度  $v = \Delta\omega/2k$  で進行する光定在波となる\*\*。原子系と光定在波との相互作用を考える際、進行する定在波より静止した定在波の方が扱い易い。よって、対向するレーザー光の周波数が異なる場合は、実験室系 S に対して  $x$  軸方向に速度  $v = \Delta\omega/2k$  で移動する座標系 S' (ここでは定在波は静止している) に移って問題を考えることにする。座標系 S' での時空座標を  $(x', t')$  と表すことにすると、S と S' 間の座標変換は以下のローレンツ変換公式に従う：

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (\text{J.7})$$

これを (J.4) に代入すると、座標系 S' における光定在波の電場表現が得られる：

$$\begin{aligned} E(x', t') &= E_+(x', t') + E_-(x', t') \\ &= 2E_0 \cos \left[ k' x' + \frac{\delta_1(t') - \delta_2(t')}{2} \right] \cos \left[ \omega' t' - \frac{\delta_1(t') + \delta_2(t')}{2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{J.8})$$

ここで、

$$k' \equiv \frac{2k_1 k_2}{(k_1 + k_2)\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \omega' \equiv \frac{2\omega_1 \omega_2}{(\omega_1 + \omega_2)\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{ただし } v = \Delta\omega/2k) \quad (\text{J.9})$$

と定義した<sup>†</sup>。また  $\delta_1(t) = \delta_1(t')$ ,  $\delta_2(t) = \delta_2(t')$  とする近似を用いた<sup>††</sup>。  $\Delta\omega$  が  $\omega$  に比べ十

\*\* 右辺右側の  $\cos$  内にある項  $\Delta kx/2$  は、位置に依存する位相を与えるが、 $\Delta k$  が  $k$  より十分小さければ、波長の数倍程度の範囲内で  $\Delta kx/2$  は一定とみなしてよい。

† 光の進行方向と同じ向きに速度  $v$  で移動する座標系でみた光の周波数  $\omega'$  は、静止系での周波

分小さければ（同じ意味だが  $\Delta k$  が  $k$  より十分小さければ）， $k'=k, \omega'=\omega$  と近似できる：

$$E(x', t') = 2E_0 \cos \left[ kx' + \frac{\delta_1(t') - \delta_2(t')}{2} \right] \cos \left[ \omega t' - \frac{\delta_1(t') + \delta_2(t')}{2} \right] \quad \left( \text{ただし } \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta k}{k} \ll 1 \right). \quad (\text{J.10})$$

この光定在波は，ミラーを折り返してできる式 (J.5) の光定在波とほとんど同じ形をしているが，光定在波の位置が電場の相対位相  $\delta_1(t') - \delta_2(t')$  に依存する点異なる．特に独立な 2 台のレーザーを用いて定在波を作った場合， $\delta_1(t')$  と  $\delta_2(t')$  の間には全く時間的相関がないので，光定在波の位置はレーザーのコヒーレンス時間と同じ時定数で揺らぐことになる．これでは原子波に対する安定な回折格子になり得ない．しかし，1 台のレーザーから音響光学変調器（AOM : Acousto-Optic Modulator）を用いて 2 本のレーザー光を用意した場合， $\delta_1(t')$  と  $\delta_2(t')$  には時間的相関ができる：

$$\delta_2(t') = \delta_1(t') + \delta_{\text{AOM}}(t') + \delta_{\text{EXT}}(t'). \quad (\text{J.11})$$

ここで， $\delta_{\text{AOM}}(t')$  は AOM でレーザー光が回折する際に生じる位相変化で，AOM の位置と注入する rf 波の位相で決まる．また， $\delta_{\text{EXT}}(t')$  は，レーザー光を反射させるミラーの位置変化や，電気光学変調器（EOM : Electro-Optic Modulator）などによって AOM を通った後のレーザー光に与えられる位相である． $\delta_{\text{EXT}}(t')$  は，ミラーの振動や風による光学距離の揺らぎなど制御できない部分と，EOM のように制御できる部分を一般に含む．以下の議論では  $\delta_{\text{AOM}}(t')$  は時間的に変動しないとして，これを無視する事にする\*．式 (J.11) を式 (J.10) に代入すると

$$E(x', t') = 2E_0 \cos \left[ kx' + \frac{\delta_{\text{EXT}}(t')}{2} \right] \cos \left[ \omega t' - \delta_1(t') - \frac{\delta_{\text{EXT}}(t')}{2} \right] \quad (\text{J.12})$$

となる．この光定在波は，式 (J.10) の定在波と違ってレーザーの位相揺らぎ  $\delta_1(t')$  によって位置が揺らぐことはない．しかし， $\delta_{\text{EXT}}(t')$  によっては位置が揺らぎ得る．式 (J.12) の右辺右側の  $\cos$  は電場の時間変化を表しているが，この位相のうち「 $-\delta_1(t')$ 」の項はレー

数を  $\omega$  として  $\omega' = \omega \sqrt{(1-v/c)/(1+v/c)}$  で与えられる（縦ドップラー効果）．光の進行方向と逆向きの場合は  $v$  を  $-v$  に置きかえればよい．

† 進行する光定在波の移動距離が，レーザー光のコヒーレント長より十分短いとき，この近似が成り立つ．本研究では，光定在波の進行速度は 6mm/s．照射時間は 100  $\mu$ s のオーダーなので，定在波の移動距離はわずか 1  $\mu$ m 程度である．これはコヒーレント長（ $\sim 50$ m）に比べ極めて短く，この近似は十分成立している．

\* つまり AOM へ注入する rf 波の位相フリップがなく，AOM がメカニカルに振動していないと仮定する．

ザーそのものの位相揺らぎを表すのに対し、「 $-\delta_{\text{EXT}}(t)/2$ 」の項はレーザー光がレーザーを出た後に加えられる位相揺らぎを表す。「 $-\delta_{\text{EXT}}(t)/2$ 」の項がレーザーのコヒーレンス時間内でほとんど揺らがない場合は、この項は実効的に無視する（ $-\delta_1(t')$ に含める）ことができる。

以上のような考察のもと、原子と光定在波との相互作用を考える上での出発点として、以下の波数  $k$ ，周波数  $\omega_L$  の定在波を考える：

$$E(x,t) = 2E_0 \cos\left[kx + \frac{\delta_{\text{EXT}}(t)}{2}\right] \cos[\omega_L t - \delta_L(t)] \quad (\text{J.13})$$

ここで  $\delta_L(t)$  はレーザーのコヒーレンス時間で  $2\pi$  程度揺らぐが、 $\delta_{\text{EXT}}(t)$  はコヒーレンス時間内ではほとんど揺らがないとする。式 (J.13) は、 $\delta_{\text{EXT}}(t) = 0$  と置けばミラーでレーザー光を折り返してできる光定在波 (J.5) を表現できる。また、1 台のレーザーから AOM を用いて周波数が  $\Delta\omega \ll \omega$  だけ異なる 2 本のレーザー光を用意して作られる光定在波は、

$$v = \Delta\omega / 2k \quad (\text{J.14})$$

で動く座標系で考えれば、同様に式 (J.13) で表現できる。

## J. 2 光定在波と2準位原子との相互作用

$z$  方向に直線偏光した式 (J.13) の電場と 2 準位原子（基底状態  $|1\rangle$ ，励起状態  $|2\rangle$ ）との相互作用ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} -\hat{\mu}_z E(x,t) &= -2\mu_{12} [ |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| ] E_0 \cos\left[kx + \frac{\delta_{\text{EXT}}(t)}{2}\right] \cos[\omega_L t - \delta_L(t)] \\ &= 2\hbar\Omega(x) [ |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| ] \cos[\omega_L t - \delta_L(t)] \end{aligned} \quad (\text{J.15})$$

と表される。ここで

$$\mu_{12} \equiv \langle 1 | \hat{\mu}_z | 2 \rangle = \langle 2 | \hat{\mu}_z | 1 \rangle \quad (\text{J.16})$$

$$\Omega(x) \equiv \Omega_0 \cos\left[kx + \frac{\delta_{\text{EXT}}(t)}{2}\right] \quad (\text{J.17})$$

$$\Omega_0 \equiv -\frac{\mu_{12} E_0}{\hbar} \quad (\text{J.18})$$

と定義した。

シュレーディンガー表示における原子系の全ハミルトニアン  $\hat{H}_S$  は、原子の重心運動エネルギー<sup>†</sup>、内部状態（電子）のエネルギー、そして (J.15) の相互作用エネルギーの和で表される：

$$\hat{H}_S = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hbar\omega_A |2\rangle\langle 2| + 2\hbar\Omega(x)[|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|] \cos[\omega_L t - \delta_L(t)]. \quad (\text{J.19})$$

ここで  $\hbar\omega_A$  は基底状態と励起状態のエネルギー差である。このハミルトニアンは、レーザ一周波数  $\omega_L$  の時間依存性を持つ。これを取り除くため、 $\hat{H}_0 = \hbar\omega_L |2\rangle\langle 2|$  とする相互作用表示に移ることにする\*。相互作用表示におけるハミルトニアン  $\hat{H}_1$  は、 $\Delta \equiv \omega_L - \omega_A$  と定義すると

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} (\hat{H}_S - \hat{H}_0) e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \\ &= \frac{\hat{p}_x^2}{2m} - \hbar\Delta |2\rangle\langle 2| + \hbar\Omega(x) [ |1\rangle\langle 2| e^{-i\delta_L(t)} + |2\rangle\langle 1| e^{i\delta_L(t)} ] \end{aligned} \quad (\text{J.20})$$

と表される。ここで、周波数  $2\omega_L$  で回転する非共鳴な項 ( $|1\rangle\langle 2| e^{-2i\omega_L t}$ ,  $|2\rangle\langle 1| e^{2i\omega_L t}$ ) を無視する回転波近似を用いた。

相互作用表示における 2 準位原子の状態ベクトルは一般的に

$$|\Psi, t\rangle_1 = |\phi_1, t\rangle \otimes |1\rangle + |\phi_2, t\rangle \otimes |2\rangle \quad (\text{J.21})$$

と表される。ここで  $|\phi_1, t\rangle$ ,  $|\phi_2, t\rangle$  は基底状態、励起状態それぞれの運動量状態を表す状態ベクトルであるが、原子の内部状態  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  の時間依存する確率振幅という意味も持つ。

<sup>†</sup> (後に示すように) 原子の運動量変化は光定在波の方向 (x 軸方向) にのみ起こるので、x 軸方向の運動エネルギーのみ演算子としてハミルトニアンに組み込めばよい (残りの成分は定数とみなせるので省略できる)。

\* シュレーディンガー表示の状態ベクトル  $|\Psi, t\rangle_S$  がシュレーディンガー方程式

$$[H_0 + H_1] |\Psi, t\rangle_S = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi, t\rangle_S$$

に従うとき、

$$|\Psi, t\rangle_S = U |\Psi, t\rangle_1 \quad (\text{ただし } U \equiv \exp[-iH_0 t/\hbar])$$

で定義される相互作用表示の状態ベクトル  $|\Psi, t\rangle_1$  は、

$$\hat{H}_1 |\Psi, t\rangle_1 = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi, t\rangle_1, \quad (\text{ただし } \hat{H}_1 = U^\dagger H_1 U)$$

を満たす。

シュレーディンガー表示における状態ベクトル $|\Psi, t\rangle_S$ は、相互作用表示における状態ベクトル $|\Psi, t\rangle_I$ と

$$|\Psi, t\rangle_S = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} |\Psi, t\rangle_I \left( = |\phi_1, t\rangle \otimes |1\rangle + e^{-i\omega_0 t} |\phi_2, t\rangle \otimes |2\rangle \right) \quad (\text{J.22})$$

の関係がある。

さて、 $|\Psi, t\rangle_I$ の時間発展を記述するシュレーディンガー方程式は、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi, t\rangle_I = \left[ \frac{\hat{p}_x^2}{2m} - \hbar\Delta |2\rangle\langle 2| + \hbar\Omega(x) \left[ |1\rangle\langle 2| e^{-i\delta_L(t)} + |2\rangle\langle 1| e^{i\delta_L(t)} \right] \right] |\Psi, t\rangle_I \quad (\text{J.23})$$

となる。式 (J.23) の両辺に左から $|1\rangle$ または $|2\rangle$ を掛けることにより、 $|\phi_1, t\rangle, |\phi_2, t\rangle$ に関する連立微分方程式が得られる：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi_1, t\rangle = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} |\phi_1, t\rangle + \hbar\Omega(x) |\phi_2, t\rangle e^{-i\delta_L(t)} \quad (\text{J.24})$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi_2, t\rangle = \left( \frac{\hat{p}_x^2}{2m} - \hbar\Delta \right) |\phi_2, t\rangle + \hbar\Omega(x) |\phi_1, t\rangle e^{i\delta_L(t)}. \quad (\text{J.25})$$

今、離調 $\Delta$ がラビ周波数 $\Omega(x)$ やレーザーの位相揺らぎ $\delta_L(t)$ の周波数帯域幅に比べ十分大きいとする。このとき、 $|\phi_2, t\rangle$ の時間変化は $|\phi_1, t\rangle$ に比べ十分速いとみなせるので、式 (J.25) において $|\phi_1, t\rangle$ を一定とみなす断熱近似が成り立つ。また、最初に（時刻 $t = -\infty$ に）励起状態の運動量状態が $|\phi_2, t = 0\rangle = \mathbf{0}$ であった（つまり原子系が基底状態 $|1\rangle$ にあった）とすると、 $|\phi_2, t\rangle$ はその後断熱的に時間発展する\*。つまり式 (J.25) の $|\phi_2, t\rangle$ の時間微分を近似的にゼロと置くことができる。すると、時刻 $t$ における $|\phi_2, t\rangle$ は、

$$|\phi_2, t\rangle = \frac{\Omega(x)}{\Delta} |\phi_1, t\rangle e^{i\delta_L(t)} \quad (\text{J.26})$$

と表すことができる\*\*。ここで、離調 $\Delta$ は十分大きいとしているので式 (J.25) の運動エネルギーの項を無視した。式 (J.26) を (J.24) に代入すると、基底状態の運動量状態 $|\phi_1, t\rangle$

\* 原子スピンのラーモア歳差運動周波数が外部磁場の方向が変化する周波数より十分大きいとき、原子スピンの断熱的にローカルな磁場の方向を向く現象（断熱追従）と同じ原理である。

\*\* ここで用いられた近似法は一般に「断熱消去 (adiabatic elimination)」と呼ばれる。

に関する運動方程式が得られる：

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi_1, t\rangle &= \frac{\hat{p}_x^2}{2m} |\phi_1, t\rangle + \frac{\hbar\Omega^2(x)}{\Delta} |\phi_1, t\rangle \\
 &= \left[ \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hbar \frac{\Omega_0^2}{2\Delta} \right] |\phi_1, t\rangle + \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\Delta} \left[ e^{2ikx+i\delta_{\text{EXT}}(t)} + e^{-2ikx-i\delta_{\text{EXT}}(t)} \right] |\phi_1, t\rangle
 \end{aligned} \tag{J.27}$$

式 (J.27) の最右辺第一項の[ ]は、状態 $|\phi_1, t\rangle$ のエネルギーに相当する ( $\hat{p}_x^2/2m$  は運動エネルギー、 $\hbar\Omega_0^2/2\Delta$  は AC シュタルクシフトに対応する<sup>†</sup>)。ここで注目すべきことは、式 (J.33) からレーザーの位相揺らぎ $\delta_L(t)$ を表す因子 $e^{i\delta_L(t)}$ が消えたことである。つまり、(離調が十分大きければ) 基底準位の運動量状態 $|\phi_1, t\rangle$ の時間発展はレーザーの位相揺らぎの影響を受けない。しかし、レーザーの外部で加えられた位相変化 $\delta_{\text{EXT}}(t)$ には依然影響を受ける。

式 (J.27) の両辺に左から運動量固有ベクトル $\langle p|$ をかけると、運動量波動関数 $\phi_1(p, t) \equiv \langle p | \phi_1, t \rangle$ に関する運動方程式が得られる：

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(p, t) &= \langle p | \left[ \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hbar\Omega_0^2}{2\Delta} \right] |\phi_1, t\rangle + \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\Delta} \langle p | \left[ e^{2ikx+i\delta_{\text{EXT}}(t)} + e^{-2ikx-i\delta_{\text{EXT}}(t)} \right] |\phi_1, t\rangle \\
 &= \left[ \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar\Omega_0^2}{2\Delta} \right] \phi_1(p, t) + \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\Delta} \left[ \phi_1(p-2\hbar k, t) e^{i\delta_{\text{EXT}}(t)} + \phi_1(p+2\hbar k, t) e^{-i\delta_{\text{EXT}}(t)} \right].
 \end{aligned} \tag{J.28}$$

この式によると、運動量状態が $|p\rangle$ である確率振幅の時間変化は、運動量状態が $|p+2\hbar k\rangle$ または $|p-2\hbar k\rangle$ である確率振幅にのみ依存する。このことより、原子が最初特定の運動量固有状態 $|p_0\rangle$ にあったとすると、運動量状態 $|p_0 \pm 2n\hbar k\rangle$  ( $n$  は整数) のみがその後ゼロでない確率振幅を持ち得ることがわかる。そこで、運動量状態を以下のよう運動量が1光子反跳運動量 $p_{\text{rec}} \equiv \hbar k$ ずつ異なる状態を展開する：

$$|\phi_1, t\rangle = \sum_n c_n(t) |\delta p + n\hbar k\rangle. \tag{J.29}$$

ここで、 $\delta p$  は初期運動量 $p_0$ の $p = n\hbar k$ からの「ずれ」を表し、以下の議論では $\delta p \ll \hbar k$ と

<sup>†</sup> 離調 $\delta$ が共鳴ラビ周波数 $\Omega_0$ に比べ十分大きいレーザー光による AC シュタルクシフト (光シフト) は、ドレسد原子の描像を用いて $\Delta E = \hbar[(\Omega_0^2 + \Delta^2)^{1/2} - \Delta]/2 \approx \hbar\Omega_0^2/4\Delta$ と計算される。今の場合、定在波を構成する2本のレーザー光からの寄与があるため、この値の2倍になる。

する. 式 (J.29) を式 (J.27) に代入し, 両辺に左から  $|\delta p + n\hbar k\rangle$  をかけると,  $c_n(t)$  に関する連立微分方程式が得られる:

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_n(t) = \left[ \frac{(\delta p + n\hbar k)^2}{2m} + \hbar \Omega_{\text{eff}} \right] c_n(t) - \hbar \frac{\Omega_{\text{eff}}}{2} \left[ c_{n-2}(t) e^{i\delta_{\text{EXT}}(t)} + c_{n+2}(t) e^{-i\delta_{\text{EXT}}(t)} \right]. \quad (\text{J.30})$$

ここで,

$$\Omega_{\text{eff}} \equiv -\frac{\Omega_0^2}{2\Delta} \quad (\text{J.31})$$

と定義した. これは**実効的ラビ周波数**または**2光子ラビ周波数**と呼ばれる.

### J. 3 光定在波による原子波の回折

式 (J.30) に従う  $c_n(t)$  の舞いを, 2光子ラビ周波数  $\Omega_{\text{eff}}$  が 1光子反跳周波数  $\omega_{\text{rec}} \equiv \hbar k^2 / 2m$  に比べ

- ①十分大きい場合 (ラマン-ナス領域)
  - ②十分小さい場合 (ブラッグ領域)
- の2つのケースについて考える.

#### ①ラマン-ナス領域 ( $\Omega_{\text{eff}} \gg \omega_{\text{rec}}$ )

このとき, 式 (J.30) から運動エネルギーの項を無視することができる (**ラマン-ナス近似**):

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_n(t) = \hbar \Omega_{\text{eff}} c_n(t) - \hbar \frac{\Omega_{\text{eff}}}{2} \left[ c_{n-2}(t) e^{i\delta_{\text{EXT}}(t)} + c_{n+2}(t) e^{-i\delta_{\text{EXT}}(t)} \right]. \quad (\text{J.32})$$

原子の初期の運動量がゼロの場合 ( $c_n(0) = \delta_{n0}$ ,  $\delta p = 0$ ), 原子の運動量が  $p = n\hbar k$  にある確率  $P_n(t) = |c_n(t)|^2$  は, 第1種ベッセル関数  $J_n(z)$  を用いて

$$P_n(t) = J_{n/2}^2(\Omega_{\text{eff}} t), \quad (\text{ただし } n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots) \quad (\text{J.33})$$

と表せることが知られている[97,117]. この  $P_n(t)$  をグラフ化したのが, 図 J.1 である. 図からわかるように, 原子波は左右対称に  $2\hbar k$  ずつ離れた複数の運動量状態に回折される.

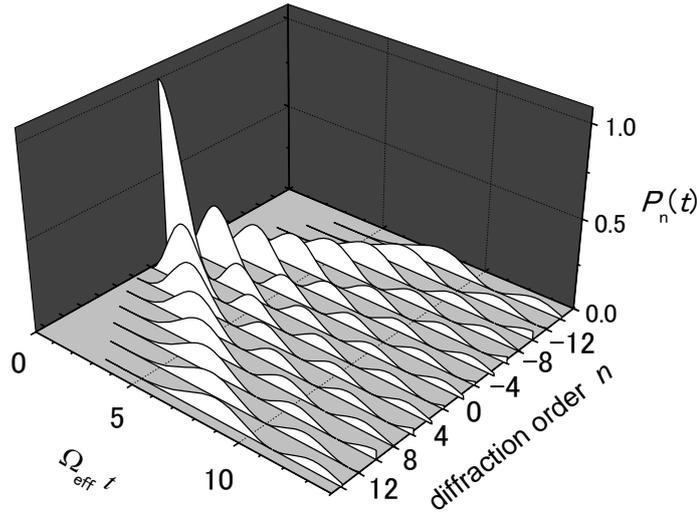


図 J.1 ラマン-ナス回折による原子波の回折パターン.

このような回折を**ラマン-ナス回折**と呼ぶ.

$J_n(z)$  の特性から  $P_n(t)$  は  $|\Omega_{\text{eff}}| t \approx n/2$  のときに有意義な値を持つ. つまり,  $n$  次のラマン-ナス回折を観測するには, 相互作用時間  $|\Omega_{\text{eff}}| t \approx n/2$  が必要である. また, 式 (J.30) において運動エネルギーの項が無視できる条件は  $|\Omega_{\text{eff}}| \gg n^2 \omega_{\text{rec}}$  であることから, 任意の次数でラマン-ナス近似が成り立つためには相互作用時間が

$$t \ll 1/\sqrt{\omega_{\text{rec}} |\Omega_{\text{eff}}|} \quad (\text{J.34})$$

を満たしていなければならないことがわかる.

## ②ブラッグ領域 ( $\Omega_{\text{eff}} \ll \omega_{\text{rec}}$ )

この領域では,  $c_n(t)$  の位相回転周波数は ( $n=0$  の場合を除き) 主に運動エネルギーによって決まり,  $\delta p \ll p_{\text{rec}}$  ならば近似的に

$$c_n(t) \propto \exp[-in^2 \omega_{\text{rec}} t] \quad (\text{J.35})$$

と表せる. つまり,  $n^2$  の値が異なれば  $c_n(t)$  の位相回転周波数も異なる. 位相回転周波数が異なる  $c_n(t)$  同士は, 式 (J.30) のような形で結合し合っているが, 互いに影響しない (共鳴しない).  $n^2$  の値が同じで  $n$  の値が 2 だけ違う  $c_n(t)$  の組は  $c_1(t)$  と  $c_{-1}(t)$  のみである. よって, 式 (J.30) は以下の  $c_1(t)$  と  $c_{-1}(t)$  に関する連立微分方程式に縮約できる:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_{-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\delta p + \hbar k)^2}{2m} - \hbar\Omega_{\text{eff}} & \frac{\hbar\Omega_{\text{eff}} e^{i\delta_{\text{EXT}}(t)}}{2} \\ \frac{\hbar\Omega_{\text{eff}} e^{-i\delta_{\text{EXT}}(t)}}{2} & \frac{(\delta p - \hbar k)^2}{2m} - \hbar\Omega_{\text{eff}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_{-1}(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{J.36})$$

ここで,  $c_1(t)$  と  $c_{-1}(t)$  を以下のように新たな変数  $C_1(t)$  と  $C_{-1}(t)$  を用いて表す:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \exp[-i(\omega_{\text{rec}} + \delta p^2 / 2m\hbar - \Omega_{\text{eff}})t] C_1(t) \\ c_{-1}(t) &= \exp[-i(\omega_{\text{rec}} + \delta p^2 / 2m\hbar - \Omega_{\text{eff}})t] C_{-1}(t). \end{aligned} \quad (\text{J.37})$$

これらを式 (J.36) に代入すると,  $C_1(t)$  と  $C_{-1}(t)$  に関する連立微分方程式が得られる:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_{-1}(t) \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\delta_{\text{eff}} & \Omega_{\text{eff}} e^{i\delta_{\text{EXT}}(t)} \\ \Omega_{\text{eff}} e^{-i\delta_{\text{EXT}}(t)} & \delta_{\text{eff}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_{-1}(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{J.38})$$

ここで,

$$\delta_{\text{eff}} \equiv 2k \frac{\delta p}{m} \quad (\text{J.39})$$

と定義した.  $\delta_{\text{eff}}$  は, 波数  $k$  のレーザー光に対して速度  $v = \delta p / m$  の原子が感じるドップラーシフト量  $\delta_{\text{Dop}} = kv$  の 2 倍 (対向する 2 本のレーザー光からの寄与の和) になっている. 式 (J.38) は, まさしく離調を持ったレーザー光と相互作用する 2 準位原子系の運動方程式であり, その一般解は容易に求められる:

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_{-1}(t) \end{pmatrix} = U(t) \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_{-1}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{J.40})$$

ただし

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega t}{2} - i \frac{\delta_{\text{eff}}}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} & i \frac{\Omega_{\text{eff}}}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} e^{i\delta_{\text{EXT}}(t)} \\ i \frac{\Omega_{\text{eff}}}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} e^{-i\delta_{\text{EXT}}(t)} & \cos \frac{\Omega t}{2} + i \frac{\delta_{\text{eff}}}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{J.41})$$

$$\Omega \equiv \sqrt{\Omega_{\text{eff}}^2 + \delta_{\text{eff}}^2}. \quad (\text{J.42})$$

特に初期状態が  $C_1(0) = 1$ ,  $C_{-1}(0) = 0$  の場合は,

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_{-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega t}{2} - i \frac{\delta_{\text{eff}}}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \\ i \frac{\Omega_{\text{eff}}}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} e^{-i\delta_{\text{EXT}}(t)} \end{pmatrix} \quad (\text{J.43})$$

となる. 運動量状態  $|\delta p + \hbar k\rangle$ ,  $|\delta p - \hbar k\rangle$  に存在する確率  $P_1(t)$ ,  $P_{-1}(t)$  計算すると,

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_{-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |c_1(t)|^2 \\ |c_{-1}(t)|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |C_1(t)|^2 \\ |C_{-1}(t)|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{\Omega^2} \left( \frac{1 - \cos \Omega t}{2} \right) \\ \frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{\Omega^2} \left( \frac{1 - \cos \Omega t}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{J.44})$$

となる. このように, 原子の運動量状態は  $|\delta p + \hbar k\rangle$  と  $|\delta p - \hbar k\rangle$  の間を周波数  $\Omega_{\text{eff}}$  で振動する. この現象は, 光定在波による原子波の**ブラッグ回折**に対応する. 図 J.2 は, 様々な相互作用時間における原子波の回折効率  $P_{-1}(t)$  を実効的離調  $\delta_{\text{eff}}$  の関数としてグラフ化したものである. グラフからわかるように,  $\Omega_{\text{eff}} t < \pi$  の範囲では, 相互作用時間が長くなるにつれてピークの幅が狭くなっていく. ピークの幅  $\Delta(\delta_{\text{eff}})$  を, 回折効率  $P_{-1}(t)$  が最初にゼロになる離調  $\delta_{\text{eff}}$  の値 (つまり  $\Omega = 2\pi$  を満たす  $\delta_{\text{eff}}$  の値) で定義すると, ピークの幅  $\Delta(\delta_{\text{eff}})$  と相互作用時間  $t$  との間には,

$$\Delta(\delta_{\text{eff}}) \cdot t = \sqrt{(2\pi)^2 - (\Omega_{\text{eff}} t)^2} \quad (\text{J.45})$$

の関係がある. 特に  $\Omega_{\text{eff}} t \ll \pi$  のとき, 式 (J.45) は  $\Delta(\delta_{\text{eff}}) \cdot t = 2\pi$  となり, これは量

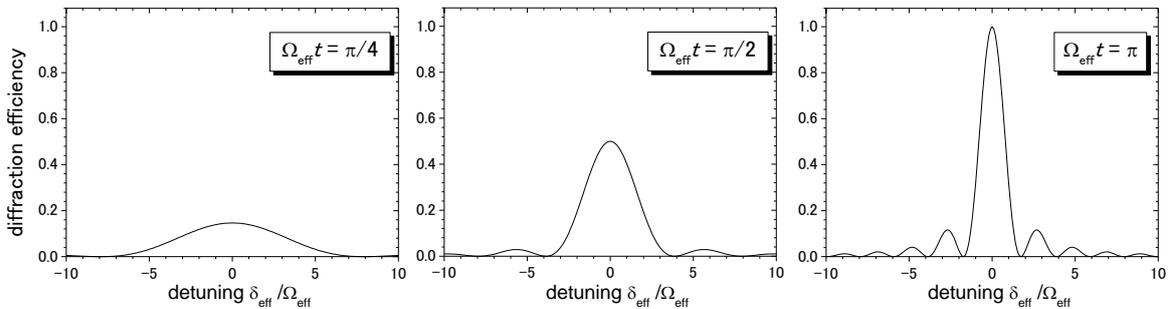


図 J.2 原子波の Bragg 回折における回折確率の離調および相互作用時間依存性.

量子力学におけるエネルギー（周波数）と時間の不確定性関係を表す．一方， $\Omega_{\text{eff}}t = \pi$  のときは  $\Delta(\delta_{\text{eff}}) = \sqrt{3}\Omega_{\text{eff}}$  となり，このことから 100% の回折効率を得るには  $\Delta(\delta_{\text{eff}}) \ll \Omega_{\text{eff}}$  でなければならないことがわかる．

特に， $\delta_{\text{eff}} = 0 (\Leftrightarrow \delta p = 0)$  かつ  $\Omega_{\text{eff}} > 0 (\Leftrightarrow \Delta < 0)$  の場合，ユニタリ行列  $U(t)$  は

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega_{\text{eff}} t}{2} & i \sin \frac{\Omega_{\text{eff}} t}{2} e^{i\delta_{\text{EXT}}(t)} \\ i \sin \frac{\Omega_{\text{eff}} t}{2} e^{-i\delta_{\text{EXT}}(t)} & \cos \frac{\Omega_{\text{eff}} t}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{J.46})$$

となる（ここで  $\Omega_{\text{eff}} > 0$  とした）．式 (J.46) は，光定在波の位相  $\delta_{\text{EXT}}(t)$  の基準を  $\pi/2$  だけずらし，

$$e^{\pm i\delta_{\text{EXT}}(t)} \rightarrow e^{\pm i(\delta_{\text{EXT}}(t) - \pi/2)} = \mp i e^{\pm i\delta_{\text{EXT}}(t)} \quad (\text{J.47})$$

と置きかえることにより

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega_{\text{eff}} t}{2} & \sin \frac{\Omega_{\text{eff}} t}{2} e^{i\delta_{\text{EXT}}(t)} \\ -\sin \frac{\Omega_{\text{eff}} t}{2} e^{-i\delta_{\text{EXT}}(t)} & \cos \frac{\Omega_{\text{eff}} t}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{J.48})$$

とも表せる．表 J.1 に，いくつかの  $\Omega_{\text{eff}}t$  の値に対する式 (J.48) の  $U(t)$  の具体形を示す．これらは，原子波干渉計の原理を説明するのに有効である．注目すべきことは， $\Omega_{\text{eff}}t = 2\pi$  で存在確率は元の状態に戻るが，確率振幅にマイナスの符号ついてしまうことである．確率振幅まで元の状態に戻すには， $\Omega_{\text{eff}}t = 4\pi$  としなければならない．このような性質はスピンの  $1/2$  の系に特有なものであり，この性質をもつ系は「2成分スピノール」と呼ばれる．

$\Omega_{\text{eff}}t$	0	$\pi/2$	$\pi$	$2\pi$	$4\pi$
$U(t)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\delta_{\text{EXT}}(t)} \\ -e^{-i\delta_{\text{EXT}}(t)} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & e^{i\delta_{\text{EXT}}(t)} \\ -e^{i\delta_{\text{EXT}}(t)} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$P_1(t)$	1	0.5	0	1	1
$P_{-1}(t)$	0	0.5	1	0	0

#### J. 4 進行した光定在波による原子波の Bragg 回折

表 J.1 いくつかの  $\Omega_{\text{eff}}t$  の値に対するユニタリ行列  $U(t)$  の具体形

これまでの議論では、静止した光定在波による原子波の回折を考えてきたが、実際の実験では原子の運動量状態に合わせて光定在波の進行速度を調節する必要がある。式 (J.14) によると、光定在波を構成する 2 本のレーザー光の周波数差が  $\Delta\omega$  のとき、その定在波が静止して見える座標系  $S'$  は実験室系  $S$  に対し速度  $v = \Delta\omega/2k$  で動いている。原子の実験室系  $S$  での運動量を  $p_0$  とすると、 $S'$  での運動量  $p_0'$  は

$$p_0' = p_0 - m \frac{\Delta\omega}{2k} \quad (\text{J.49})$$

となる。この原子波を光定在波でブラッグ回折させるためには、定在波が静止している座標系で  $\pm\hbar k$  の運動量を持つ必要がある。この条件から、2 本のレーザー光の周波数差  $\Delta\omega$  が満たすべき条件が得られる：

$$p_0' = \pm\hbar k \Leftrightarrow \hbar\Delta\omega = \pm \frac{(p_0 \pm 2\hbar k)^2}{2m} \mp \frac{p_0^2}{2m}. \quad (\text{J.50})$$

つまり、周波数差が回折前と回折後の運動エネルギーの差に等しければよい。これはまさしく共鳴条件（エネルギー保存則）に他ならない。 $\Delta\omega$  が共鳴周波数から  $\delta\omega$  だけずれていた場合、つまり、

$$\hbar\Delta\omega = \pm \frac{(p_0 \pm 2\hbar k)^2}{2m} \mp \frac{p_0^2}{2m} - \hbar\delta\omega \quad (\text{J.51})$$

のとき（運動エネルギーの差が  $\hbar\Delta\omega$  より大きいとき  $\delta\omega > 0$  となるよう  $\delta\omega$  を定義した）、これを式 (J.49) に代入すると

$$p_0' = \pm\hbar k + m \frac{\delta\omega}{2k} \quad (\text{J.52})$$

となり、 $S'$  での運動量が  $p_0' = \pm\hbar k$  から  $\delta p' = m\delta\omega/2k$  だけずれる。この「ずれ」による実効的な離調  $\delta_{\text{eff}}$  を式 (J.39) を用いて計算すると、

$$\delta_{\text{eff}} = 2k \frac{\delta p'}{m} = \delta\omega \quad (\text{J.53})$$

となる。つまり、 $\delta\omega$  は共鳴からの実効的な離調そのものである。よって、状態  $|p_0\rangle$  と

$|p_0 + \hbar k\rangle$  (または  $|p_0 - \hbar k\rangle$ ) 間の原子波のブラッグ回折現象は, 共鳴からの離調  $\delta\omega$ , 共鳴ラビ周波数  $\Omega_{\text{eff}}$  の 2 準位系と (緩和過程を無視すれば) 数学的に等価である (図 J.3).

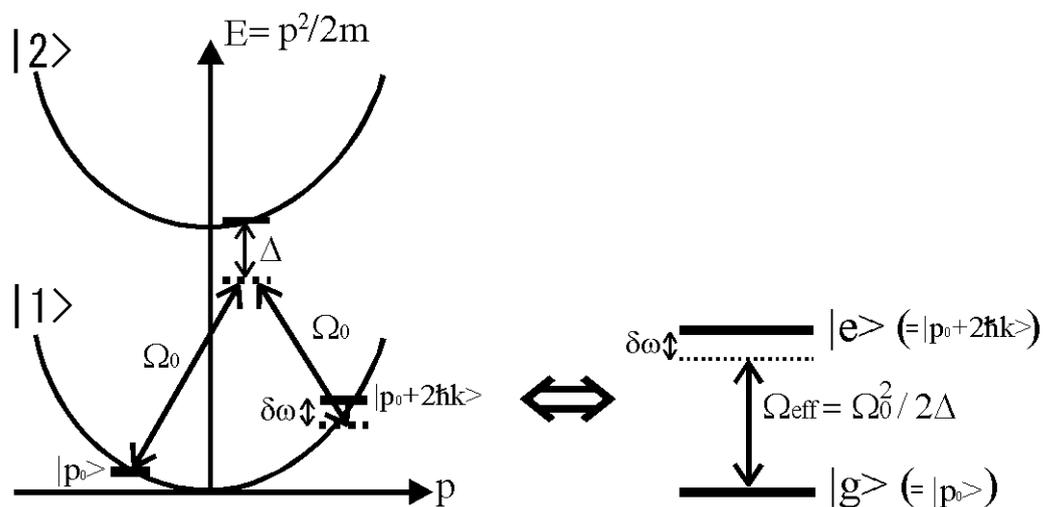


図 J.3 原子波のブラッグ回折 (左) 二準位原子系 (右). 緩和過程を無視すれば両者は数学的に等価である.