付録Ｇ　二準位原子気体の吸収係数および屈折率

Ｇ．１ 複素電気感受率と吸収係数および屈折率の関係

自由電荷の存在しない媒質におけるマクスウェル方程式は以下の４式からなる：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{G.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{G.2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{G.3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \ . \tag{G.4}$$

電場として、ｚ方向に進行し、ｘ方向に直線偏光した角周波数ωの複素平面波*を考える：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \hat{\boldsymbol{x}} E(z, t) = \hat{\boldsymbol{x}} E_0 \exp\left[i(Kz - \omega t) \right] \ . \tag{G.5}$$

ここで K は未知数で、これを求めることがこの節の目的である．この電場によって誘起される媒質の複素分極は、電場と以下の関係を満たすとする：

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E} \ . \tag{G.6}$$

ここで χ は**複素電気感受率**と呼ばれる．電流密度 $\boldsymbol{j}$ は，この分極の時間微分で表せる：

$$\boldsymbol{j} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = \varepsilon_0 \chi \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \ . \tag{G.7}$$

これを式（G.4）に代入すると、

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{G.8}$$

となる．この式の両辺の時間微分をとると、

＊ 本来，電場や分極は実数の物理量であるが，これらの間の位相差を表現するために複素数で表現する．計算された結果の実部が，実際の物理量に対応すると考えればよい．

$$\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\mu_0\varepsilon_0(1+\chi)\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\Leftrightarrow-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\mu_0\varepsilon_0(1+\chi)\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$
$$\Leftrightarrow\nabla^2\boldsymbol{E}=\mu_0\varepsilon_0(1+\chi)\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\quad. \tag{G.9}$$

ここで、ベクトル演算の公式$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}$（∵式（G.1））を用いた．電場の表式（G.5）を、（G.9）に代入すると、$E(z,t)$が満たすべき次の方程式が得られる：

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E(z,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}E(z,t)\,. \tag{G.10}$$

ここで$c\equiv1\big/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ は真空中の光速である．この方程式より、Kが満たすべき条件式、

$$K^2=\frac{\omega^2}{c^2}(1+\chi)=k^2(1+\chi) \tag{G.11}$$

が得られる．ここで$k\equiv\omega/c$は真空中での波数（$2\pi/\lambda$）である．$\chi<<0$と仮定すると†、Kは近似的に

$$K\cong k\left(1+\frac{\chi}{2}\right) \tag{G.12}$$

と書ける．ここで、複素電気感受率χを実部と虚部に分けて表す：

$$\chi=\chi'+i\chi''\quad. \tag{G.13}$$

式（G.12）、（G,13）より、$E(z,t)$は以下のように表せる：

$$E(z,t)=E_0\exp\left[ik\left(1+\frac{\chi'}{2}+i\frac{\chi''}{2}\right)z-i\omega t\right]=E_0\exp\left[-\frac{\alpha}{2}\right]\exp\left[ik'\left(z-\frac{\omega}{k'}t\right)\right] \tag{G.14}$$

† この仮定は光が波長オーダーの長さ進んだときの減衰または位相変化が 1 より十分小さければ成立する．原子気体においては、原子間距離が光の波長に比べ十分長ければよい．Rb 原子の場合，密度が $1/\lambda^3\sim10^{12}/\mathrm{cm}^3$ より十分小さければよい．この条件は，磁気光学トラップされた冷却原子集団（$n\sim10^{11}/\mathrm{cm}^3$）ではかろうじて成り立つが，磁気トラップ中のボース凝縮体（$n\sim10^{14}/\mathrm{cm}^3$）では全く成り立たないので注意が必要である．

ここで

$$\alpha = k\chi'' \tag{G.15}$$

$$k' = k\left(1 + \frac{\chi'}{2}\right) \tag{G.16}$$

とおいた．式（G.14）より、電場強度 $I(z) \propto \left|E(z,t)\right|^2$ は位置依存性

$$I(z) = I_0 \exp(-\alpha z) \tag{G.17}$$

を持つ．α>0（χ>0）ならば電場強度は指数関数的に減少する．よって α は**吸収係数**と呼ばれる．また、式（G.14）より、この平面波が進行する速さは

$$c' = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{1 + \chi'/2} = \frac{c}{\eta} \tag{G.18}$$

となる．$\eta = 1 + \chi'/2$ は**屈折率**と呼ばれる．このように，媒質の吸収係数および屈折率を知るには，媒質の複素電気感受率を知ればよい．以降の節では二準位原子の複素電気感受率を求め，原子集団の吸収係数および屈折率を求める．

G．2　二準位原子とレーザー光との相互作用

基底状態 $|1>$ と励起状態 $|2>$ のエネルギー差が $\hbar\omega_A$ である二準位原子と，x 方向に偏光した角周波数 ω_L のレーザー光との相互作用を考える．原子の位置での電場の x 成分を

$$E(t) = E_0 \cos\omega t = \frac{E_0}{2}\left[\exp(i\omega_L t) + \exp(-i\omega_L t)\right] \tag{G.19}$$

と表す．前節と違い，$E(t)$ は実数である．このとき、原子系のハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - e\hat{D}_x E(t) \tag{G.20}$$

と表せる．$\hat{D}_x \equiv \sum_i \hat{x}_i$ は、全電子の変位演算子の x 成分である．$\hat{H}_0$ は電磁波がないときのハミルトニアンで、以下の関係を満たすとする（エネルギーの基準点を基底準位と励起準位の中間にとる）：

$$\hat{H}_0 |1> = -\frac{\hbar\omega_A}{2}|1>, \quad \hat{H}_0 |2> = \frac{\hbar\omega_A}{2}|2> \ . \tag{G.21}$$

ここで２準位系の状態を

$$
\begin{aligned}
|\Psi> &= C_1(t)\exp\left(\frac{i}{2}\omega_L\, t\right)|1> + C_2(t)\exp\left(-\frac{i}{2}\omega_L\, t\right)|2> \\
&= C_1(t)\exp\left[\frac{i}{2}(\delta+\omega_A)t\right]|1> + C_2(t)\exp\left[-\frac{i}{2}(\delta+\omega_A)t\right]|2>
\end{aligned}
\tag{G.22}
$$

と展開することにする．$\delta \equiv \omega_L - \omega_A$ はレーザー光の離調である．式（G.22）の展開式は、摂動であるレーザーの周波数 ω_L で振動する電気双極子が原子に誘起される効果を見越したもので、一種の相互作用表示に対応する．このとき，系の密度行列 $\rho \equiv |\Psi><\Psi|$ の各要素は以下のように表せる：

$$\rho_{11} = <1|\rho|1> = C_1(t)C_1^*(t) \tag{G.23}$$

$$\rho_{12} = <1|\rho|2> = C_1(t)C_2^*(t)\exp(i\omega_L t) \tag{G.24}$$

$$\rho_{21} = <2|\rho|1> = C_2(t)C_1^*(t)\exp(-i\omega_L t)\left(=\rho_{12}^*\right) \tag{G.25}$$

$$\rho_{22} = <2|\rho|2> = C_2(t)C_2^*(t) \tag{G.26}$$

ここで

$$\tilde{\rho}_{12} \equiv C_1(t)C_2^*(t) \tag{G.27}$$

$$\tilde{\rho}_{21} \equiv C_2(t)C_1^*(t)\left(=\tilde{\rho}_{12}^*\right) \tag{G.28}$$

と定義しておくと、分極の期待値は

$$P(t) = e<\Psi|\hat{D}_x|\Psi> = \mu_{12}\left[\tilde{\rho}_{12}\exp(i\omega_L t) + \tilde{\rho}_{21}\exp(-i\omega_L t)\right] \tag{G.29}$$

と表せる．ここで

$$\mu_{12} \equiv e<1|\hat{D}_x|2> = e<2|\hat{D}_x|1> \tag{G.30}$$

は原子の電気双極子モーメントで、ここでは実数とする（この仮定は一般性を失わない）．電場 $E(t)$ と分極 $P(t)$ の複素表示（(式（G.19）と（G.29）それぞれの $\exp(-i\omega_L t)$ 成分）と、電場と分極の関係式（G.6）より，複素電気誘電率を求めることができる：

$$\chi = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{P(t)\text{の}\exp(-i\omega_L t)\text{成分}}{E(t)\text{の}\exp(-i\omega_L t)\text{成分}} = \frac{2\mu_{12}\tilde{\rho}_{21}}{\varepsilon_0 E_0} \tag{G.31}$$

つまり，$\tilde{\rho}_{21}\left(=\tilde{\rho}_{12}^*\right)$の具体形がわかれば、原子の複素電気感受率がわかる．原子の密度行列要素を決定するのは，原子系のシュレーディンガー方程式

$$\hat{H}\,|\Psi> = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi> \tag{G.32}$$

である．この方程式の両辺に左から<1|または<2|をかけることにより，$C_1(t), C_2(t)$が満たすべき連立微分方程式が得られる：

$$\frac{dC_1(t)}{dt} = -\frac{i\delta}{2}C_1(t) + \frac{i\Omega}{2}C_2(t) \tag{G.33}$$

$$\frac{dC_2(t)}{dt} = \frac{i\Omega}{2}C_1(t) + \frac{i\delta}{2}C_2(t) \tag{G.34}$$

ただし

$$\Omega \equiv \frac{\mu_{12}E_0}{\hbar}\quad . \tag{G.35}$$

導出の際、電場の$\exp(i\omega t)$の項を無視する回転波近似を用いた．ここで定義したΩは，**ラビ周波数**（ここでは実数）と呼ばれる．

励起状態|2>の原子が単位時間あたり$\Gamma \equiv 2\gamma$の確率で自然放出により基底状態|1>に緩和する効果を現象論的に取り入れるため、式（G.34）に、減衰項$-\gamma C_2(t)$を付け加える：

$$\frac{dC_2(t)}{dt} = \frac{i\Omega}{2}C_1(t) + \left(\frac{i\delta}{2} - \gamma\right)C_2(t) \tag{G.36}$$

この式より，励起状態の存在確率であるρ_{22}の時間微分を計算すると、

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_{22}}{dt} &= \frac{dC_2(t)}{dt}C_2^*(t) + C_2(t)\frac{dC_2^*(t)}{dt}\\ &= -2\gamma\rho_{22} + \frac{i\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21})\\ &= -\Gamma\rho_{22} - \Omega\,\mathrm{Im}(\tilde{\rho}_{12})\end{aligned} \tag{G.37}$$

このように、減衰項$-\Gamma\delta_{22}$が表れる．同様に$\tilde{\rho}_{12}$の時間微分を式（G.33)，（G.36）から計算すると，

$$\frac{d\tilde{\rho}_{12}}{dt}=\frac{dC_1(t)}{dt}C_2^*(t)+C_1(t)\frac{dC_2^*(t)}{dt}$$
$$=(-i\delta-\gamma)\tilde{\rho}_{12}+\frac{i\Omega}{2}(\rho_{22}-\rho_{11}) \tag{G.38}$$

となる．$\tilde{\rho}_{12}$の減衰項$-\gamma\tilde{\rho}_{12}$の係数がρ_{22}の減衰項$-\Gamma\delta_{22}$の半分$(\gamma=\Gamma/2)$であることは重要である．$\tilde{\rho}_{21}$の時間微分は，$\tilde{\rho}_{21}=\tilde{\rho}_{12}^*$より式（G.38）の複素共役である：

$$\frac{d\tilde{\rho}_{21}}{dt}=(i\delta-\gamma)\tilde{\rho}_{21}-\frac{i\Omega}{2}(\rho_{22}-\rho_{11}) \tag{G.39}$$

ρ_{11}の時間微分を考えるときは、注意が必要である．式（G.33)，（G.36）より素直に計算すれば

$$\frac{d\delta_{11}}{dt}=\frac{dC_1(t)}{dt}C_1^*(t)+C_1(t)\frac{dC_1^*(t)}{dt}$$
$$=-\frac{i\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{12}-\tilde{\rho}_{21}) \tag{G.40}$$

となる．しかし，確率の保存則$\rho_{11}+\rho_{22}=1$より、

$$\frac{d\delta_{11}}{dt}=-\frac{d\delta_{22}}{dt} \tag{G.41}$$

が成立していなければならない．そこで、自然放出による励起状態から基底状態へ確率の移動を表す項$\Gamma\rho_{22}$を，式（G.40）に付け加える：

$$\frac{d\delta_{11}}{dt}=\Gamma\rho_{22}-\frac{i\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{12}-\tilde{\rho}_{21})$$
$$=\Gamma(1-\rho_{11})+\Omega\,\mathrm{Im}(\tilde{\rho}_{12}). \tag{G.42}$$

この式は，確かに条件式（G.41）を満たしている．

ここで，次の変数を導入する：

$$W \equiv \rho_{22} - \rho_{11} \tag{G.43}$$

$$U \equiv \tilde{\rho}_{12} + \tilde{\rho}_{21} \left(= 2\,\mathrm{Re}(\tilde{\rho}_{12})\right) \tag{G.44}$$

$$V \equiv -i(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) \left(= 2\,\mathrm{Im}(\tilde{\rho}_{12})\right) \tag{G.45}$$

これらが満たす連立微分方程式は，式（G.37）（G.38）（G.39）（G.42）より

$$\frac{dW}{dt} = -\Gamma(W+1) - \Omega V \tag{G.46}$$

$$\frac{dU}{dt} = -\gamma U + \delta V \tag{G.47}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma V - \delta U + \Omega W \tag{G.48}$$

となる．ここで，ベクトル $\vec{\rho} \equiv (U, V, W)$ （これは**ブロッホベクトル**と呼ばれる）を考える，もし緩和がなければ（$\Gamma = \gamma = 0$），式（G.46）～（G.48）は以下の微分方程式（**ブロッホ方程式**）と同値である：

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\rho} \times \vec{\Omega} \tag{G.49}$$

ただし，

$$\vec{\Omega} \equiv (\Omega, 0, \delta)\,. \tag{G.50}$$

微分方程式（G.49）より，　$\vec{\rho}$ は $\vec{\Omega}$ の周りを周波数 $\left|\vec{\Omega}\right| = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$ で歳差運動することがわかる．緩和が存在する場合（$\Gamma = 2\gamma \neq 0$）は，　$\vec{\rho}$ はある定常的な点に収束していく．この点を求めるには、式（G.46）～（G.48）において時間微分を 0 とおいた式（*U, V, W* に関する 3 元連立一次方程式）を解けばよく，結果は，

$$V = -\frac{2\gamma}{\Omega}\frac{s(\delta)}{1+s(\delta)} \tag{G.51}$$

$$U = -\frac{2\delta}{\Omega}\frac{s(\delta)}{1+s(\delta)} \tag{G.52}$$

$$W = -\frac{1}{1+s(\delta)} \tag{G.53}$$

となる．ここで

$$s(\delta) \equiv s_0 L(\delta) \tag{G.54}$$

$$s_0 \equiv \frac{\Omega^2}{2\gamma^2} \tag{G.55}$$

$$L(\delta) \equiv \frac{1}{1+(\delta/\gamma)^2} \tag{G.56}$$

と定義した．$s(\delta)$ は，**飽和パラメータ**と呼ばれる．特に $s(0)=s_0$ を共鳴飽和パラメータと呼ぶことにする．$L(\delta)$ は，$L(0)=1$ となるよう規格化された半値半幅 γ のローレンツ関数である．式（G.51）～（G.53）より，密度行列の各要素は以下のように求まる：

$$\rho_{22} = \frac{1}{2}(1+W) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2+s(\delta)}{1+s(\delta)} \tag{G.57}$$

$$\rho_{22} = \frac{1}{2}(1-W) = \frac{1}{2}\cdot\frac{s(\delta)}{1+s(\delta)} \tag{G.58}$$

$$\tilde{\rho}_{12} = \frac{1}{2}(U+iV) = -\frac{s(\delta)}{1+s(\delta)}\cdot\frac{\delta+i\gamma}{\Omega} \tag{G.59}$$

$$\tilde{\rho}_{21} = \frac{1}{2}(U-iV) = -\frac{s(\delta)}{1+s(\delta)}\cdot\frac{\delta-i\gamma}{\Omega} \quad . \tag{G.60}$$

G．3　二準位原子気体の吸収係数および屈折率

式（G.31），（G.60）より，２準位原子の複素電気感受率 χ は

$$\begin{aligned}\chi = \frac{2\mu_{12}\tilde{\rho}_{21}}{\varepsilon_0 E_0} &= -\frac{2\mu_{12}}{\varepsilon_0 E_0}\cdot\frac{s_0 L(\delta)}{1+s(\delta)}\cdot\frac{\delta-i\gamma}{\Omega} \\ &= \frac{\mu_{12}^2}{\varepsilon_0 \hbar\gamma^2}\cdot\frac{L(\delta)}{1+s(\delta)}(-\delta+i\gamma)\end{aligned} \tag{G.61}$$

と表される．χ の具体的な値を知るには，電気双極子モーメント μ_{12} の値を知る必要がある．自然放出のウィグナー・ワイスコップ理論によると、自然放出レート Γ は、

$$\Gamma \equiv 2\gamma = \frac{\mu_{12}^2\omega^3}{3\pi\varepsilon_0\hbar c^3} = \frac{\mu_{12}^2 k^3}{3\pi\varepsilon_0\hbar} \tag{G.62}$$

で与えられるが[††]（Rb 原子 D_2 線の Γ の値は付録 J を参照），これを変形すれば，電気双極子モーメントは，

$$\mu_{12}^2 = \frac{6\pi\varepsilon_0\hbar\gamma}{k^3} \tag{G.63}$$

と表される．よって，χ は具体的に，

$$\chi = 6\pi\bar{\lambda}^3 \frac{L(\delta)}{1+s(\delta)} \cdot \frac{-\delta + i\gamma}{\gamma} \tag{G.64}$$

と表せる（$\bar{\lambda} \equiv 1/k = \lambda/2\pi$）．また（G.63）より，共鳴飽和パラメータ $s_0 = \Omega^2/2\gamma^2$ と，実際の電場強度 $I = \varepsilon_0 c E_0^2/2$ との関係式

$$s_0 = \frac{\Omega^2}{2\gamma^2} = \frac{\mu_{12}^2 E_0^2}{2\hbar^2\gamma^2} = \frac{6\pi\varepsilon_0 E_0^2}{2\hbar\gamma k_3} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 \cdot \frac{6\pi\bar{\lambda}^3}{c\hbar\gamma} = I/I_s \tag{G.65}$$

が得られる．ここで，

$$I_s \equiv \frac{c\hbar\gamma}{6\pi\bar{\lambda}^3} \tag{G.66}$$

は**飽和強度**と呼ばれ（その具体的値は，付録 J を参照）、励起状態の占有確率 ρ_{22} が 1/4（飽和値 1/2 の半分）となる共鳴レーザー光の強度である．一原子あたりの吸収係数，つまり原子の吸収断面積 $\sigma_{\mathrm{abs}}(\delta)$ は，式（G.15）より，

$$\sigma_{\mathrm{abs}}(\delta) = k\,\mathrm{Im}(\chi) = 6\pi\bar{\lambda}^2 \frac{L(\delta)}{1+s(\delta)} = \sigma_{\mathrm{abs}} \frac{L(\delta)}{1+s(\delta)} \tag{G.67}$$

[††] ウィグナー・ワイスコップ理論（1930 年）では，真空場の揺らぎによって励起状態の原子が光子を誘導放出する過程を自然放出の起源とする．同様の結果は、1917 年にアインシュタインが真空場の概念を用いずに導いている. アインシュタインはプランクの輻射公式に従う黒体輻射と、原子系の相互作用として、自然放出（A 係数）と誘導放出（B 係数）を仮定した．そしてボルツマン分布している原子系に詳細釣り合いの原理を適応することにより、A 係数、つまり自然放出レートを導いた．アインシュタインの導出法で用いられたプランクの輻射公式は、光子にボース統計を適応することにより得られる．一方、ウィグナー・ワイスコップ理論で自然放出の起源とされる真空場の揺らぎは、ボース統計を満たすべく定義された生成消滅演算子の交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ からの帰結である．つまり両者は、どちらも光子のボース統計性を起源としており、同じ結果が得られたことは不思議ではない.

が得られる．$\sigma_{\text{abs}} \equiv 6\pi ƛ^2$ は、レーザーの強度が飽和強度に比べて十分弱く（$s(\delta) = I / I_s \sim 0$），かつ共鳴の場合（$\delta = 0$）の吸収断面積であり，原子の遷移波長 λ のみで決まる．この二準位原子からなる気体の吸収係数 α は，一原子あたりの吸収断面積 $\sigma_{\text{abs}}(\delta)$ に気体の密度 n をかけたものになる：

$$\alpha = n\sigma_{\text{abs}} \frac{L(\delta)}{1+s(\delta)} \quad . \tag{G.68}$$

また、原子気体の屈折率 η は、式（G.18）、（G.64）より

$$\eta = 1 + \frac{\mathrm{Re}(\chi)}{2} n = 1 - 3\pi ƛ^3 n \frac{\delta L(\delta)/\gamma}{1+s(\delta)} \tag{G.69}$$

と表せる．よって、単位長さあたりの位相シフト $\dfrac{d\phi}{dz} = -k(\eta - 1)$ ** は

$$\frac{d\phi}{dz} = -k \frac{\mathrm{Re}(\chi)}{2} n = 3\pi ƛ^2 n \frac{\delta L(\delta)/\gamma}{1+s(\delta)} = n \frac{\sigma_{\text{abs}}}{2} \frac{\delta L(\delta)/\gamma}{1+s(\delta)} \tag{G.70}$$

となる．特にレーザー強度が弱く、$s(\delta) = 0$ と近似できるときの α および $d\phi / dz$ の離調依存性は

$$\alpha = n\sigma_{\text{abs}} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \delta^2} \xrightarrow{|\delta| >> \gamma} n \frac{\sigma_{\text{abs}}}{\Delta^2} \tag{G.70}$$

$$\frac{d\phi}{dz} = n \frac{\sigma_{\text{abs}}}{2} \frac{\gamma\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \xrightarrow{|\delta| >> \gamma} n \frac{\sigma_{\text{abs}}}{2\Delta} \tag{G.71}$$

となる．ここで $\Delta \equiv \delta / \gamma$ は規格化されたレーザーの離調である．

** 位相速度が光速より遅い場合、つまり光学距離が長くなる場合に $d\phi / dz > 0$ となるように定義した．