付録 E　ボース凝縮体の波動関数

E. 1 グロス･ピタエフスキー方程式

外部ポテンシャル$V_{\mathrm{trap}}(\boldsymbol{r})$に閉じ込められた N 個のボース粒子の系を考える．粒子数密度は十分低く、二体衝突のみ起こるとする．つまり、粒子間相互作用として、二粒子間ポテンシャル$U(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$のみを考える．また系の温度 Tは十分低く、熱的ド・ブロイ波長（ド・ブロイ波長の平均的長さ） $\lambda_{\mathrm{dB}} \equiv h/\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}} T}$ は、二粒子間ポテンシャル$U(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$の到達距離に比べて十分長いとする．このとき、S 波散乱のみを考えればよく（付録 D.4 参照)、ポテンシャルは実効的にデルタ関数で近似できる：

$$U(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) = U_0 \delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) . \tag{E.1}$$

付録 D の式（D.42）より、U_0は S 波散乱の散乱長aを用いて、

$$U_0 = \int d\boldsymbol{r}' U(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \tag{E.2}$$

と表される（m は粒子の質量).

ポテンシャル$U(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$が，式（E.1）のように近似できるとき，場の演算子$\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t)$の時間発展を記述するハイゼンベルグの運動方程式は、付録 C の式（C.30）で与えられる：

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{trap}(\boldsymbol{r}) + U_0 \hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r},t) \hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t) \right] \hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t) \quad . \tag{E.3}$$

今、この系がボース・アインシュタイン凝縮を起こしているとする．このとき、ボゴリューホフによる平均場理論（mean-field theory）[23]では、場の演算子を以下のように分解する：

$$\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t) = \Phi(\boldsymbol{r},t) + \hat{\Psi}'(\boldsymbol{r},t) \tag{E.4}$$

ただし、

$$\Phi(\boldsymbol{r},t) = \langle \hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t) \rangle . \tag{E.5}$$

$\Phi(\boldsymbol{r},t)$ は c 数の関数で、**ボース凝縮体の波動関数**または**オーダーパラメーター**と呼ばれる．$\hat{\Psi}'(\boldsymbol{r},t)$ は量子的または熱的揺らぎを表す演算子で、定義より $<\hat{\Psi}'(\boldsymbol{r},t)>=0$ である．式（E.4）を式（E,3）に代入して期待値をとると、$\Phi(\boldsymbol{r},t)$ に関する波動方程式が得られる：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\boldsymbol{r},t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_{trap}(\boldsymbol{r})+U_0\left|\Phi(\boldsymbol{r},t)\right|^2\right]\Phi(\boldsymbol{r},t)\quad . \tag{E.6}$$

これは**非線型シュレーディンガー方程式**、または**グロス･ピタエフスキー方程式**と呼ばれる [24,25]．二粒子間相互作用による項 $U_0\left|\Phi(\boldsymbol{r},t)\right|^2$ は**平均場エネルギー**と呼ばれる．この項がなければ、式（E.6）は、まさしく一粒子のシュレーディンガー方程式に帰着する．

式（E.6）の解として、定常状態 $\Phi(\boldsymbol{r},t)=\exp\left(-\mathrm{i}\mu t/\hbar\right)\Phi(\boldsymbol{r})$ を考える．これを式（E.6）に代入すると、時間に依存しないグロス・ピタエフスキー方程式が得られる：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_{trap}(\boldsymbol{r})+U_0\left|\Phi(\boldsymbol{r})\right|^2\right]\Phi(\boldsymbol{r})=\mu\Phi(\boldsymbol{r})\quad . \tag{E.7}$$

E. 3 で示すように、μ はボース凝縮体の（全エネルギーではなく）化学ポテンシャルである．付録 C の式（C.18）より、時刻 t、位置 $\boldsymbol{r}$ での粒子数密度 $n(\boldsymbol{r})$ は、場の演算子の積の期待値 $<\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\Psi}(\boldsymbol{r})>$ で表される．これを計算すると、

$$\begin{aligned}n(\boldsymbol{r})&=<\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\Psi}(\boldsymbol{r})>\\&=<(\Phi^*(\boldsymbol{r})+\hat{\Psi}'^\dagger(\boldsymbol{r}))(\Phi(\boldsymbol{r})+\hat{\Psi}'(\boldsymbol{r}))>\\&=\left|\Phi(\boldsymbol{r})\right|^2+<\hat{\Psi}'^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\Psi}'(\boldsymbol{r})>\end{aligned} \tag{E.8}$$

となる．$\left|\Phi(\boldsymbol{r})\right|^2$ はボース凝縮体の密度分布、$<\hat{\Psi}'^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\Psi}'(\boldsymbol{r})>$ はボース凝縮していない成分（**ノーマル成分**と呼ぶ）の密度分布を表す．今、特に系の温度がゼロで、全ての粒子がボース凝縮しているとする．このとき、ボース凝縮体の密度分布 $\left|\Phi(\boldsymbol{r})\right|^2$ を全空間にわたって積分したものは、全粒子数 N になる（$\Phi(\boldsymbol{r})$ に関する規格化条件）：

$$\int\left|\Phi(\boldsymbol{r})\right|^2 d\boldsymbol{r}=N\quad . \tag{E.9}$$

E. 2 トーマス･フェルミ近似

今後は散乱長aが正、つまり$U_0 > 0$の場合のみ考えることにする．粒子数Nが十分大きいとき、平均場エネルギーが運動エネルギーに比べてずっと大きくなる．このとき時間に依存しないグロス・ピタエフスキー方程式（E.7）から、運動エネルギーの項を無視する近似（**トーマス･フェルミ近似**）ができる：

$$\left[V_{trap}(\boldsymbol{r}) + U_0 |\Phi(\boldsymbol{r})|^2\right] \Phi(\boldsymbol{r}) = \mu\Phi(\boldsymbol{r}) \quad . \tag{E.10}$$

式（E.10）は、全ての$\boldsymbol{r}$において満足されなければならないので、$\Phi(\boldsymbol{r})$がゼロでない$\boldsymbol{r}$については、

$$V_{trap}(\boldsymbol{r}) + U_0 |\Phi(\boldsymbol{r})|^2 = \mu \tag{E.11}$$

が成立する．よって、ボース凝縮体の密度分布$n(\boldsymbol{r})$は、

$$n(\boldsymbol{r}) = |\Phi(\boldsymbol{r})|^2 = \max\left[\frac{\mu - V_{trap}(\boldsymbol{r})}{U_0}, 0\right] \tag{E.12}$$

と表される．

今、具体的に$V_{trap}(\boldsymbol{r})$として、非等方的三次元調和ポテンシャルを考える：

$$V_{trap}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad . \tag{E.13}$$

$|\Phi(\boldsymbol{r})|^2$の規格化条件（E.9）と、U_0の具体形（E.2）より、μは以下のように表せる：

$$\mu = \frac{1}{2}\hbar\overline{\omega}\left(15Na\sqrt{\frac{m\overline{\omega}}{\hbar}}\right)^{2/5} = 1.48\left(Na\hbar^2\overline{\omega}^3 m^{1/2}\right)^{2/5}. \tag{E.14}$$

ここで、

$$\overline{\omega} \equiv \left(\omega_x \omega_y \omega_z\right)^{1/3} \tag{E.15}$$

と定義した（$\overline{\omega}$ は $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ の幾何平均）.

式（E.13）～（E.15）より，ピーク密度 $n_0 \equiv n(0)$、およびボース凝縮体の（$n(\boldsymbol{r}) \neq 0$ である領域の）x, y, z 方向の半幅 d_i（$i = x, y, z$）は，

$$n_0 = \frac{\mu}{U_0} = 0.118 \left(N_0 m^3 \overline{\omega}^3 / \hbar^3 a^{3/2}\right)^{2/5}. \tag{E.16}$$

$$d_i = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}} = \frac{1.72}{\omega_i}\left(Na\hbar^2 \overline{\omega}^3 / m^2\right)^{1/5} \tag{E.17}$$

と表せる.

E. 3　ボース凝縮体のエネルギー

ボース粒子系の全エネルギーを表すハミルトニアンは、付録 C の（C.23）より、

$$\hat{H} = \int d\boldsymbol{r}\, \hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{trap}(\boldsymbol{r}) \right] \hat{\Psi}(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}\iint d\boldsymbol{r} d\boldsymbol{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r}') U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \hat{\Psi}(\boldsymbol{r}) \hat{\Psi}(\boldsymbol{r}') \tag{E.18}$$

で与えられる．これに、$\hat{\Psi}(\boldsymbol{r}) = \Phi(\boldsymbol{r}) + \hat{\Psi}'(\boldsymbol{r})$（式 (E.1)）、$U(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) = U_0 \delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$（式 (E.4)）を代入し、期待値をとれば、ボース凝縮体の全エネルギー E が求まる：

$$E = \langle \hat{H} \rangle = \int d\boldsymbol{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left|\nabla \Phi(\boldsymbol{r})\right|^2 + V_{\mathrm{trap}}(\boldsymbol{r}) \left|\Phi(\boldsymbol{r})\right|^2 + \frac{U_0}{2}\left|\Phi(\boldsymbol{r})\right|^4 \right] . \tag{E.19}$$

このように、全エネルギー E は、運動エネルギー E_{kin}、ポテンシャルエネルギー E_{pot}、相互作用（平均場）エネルギー E_{int} の三つの寄与からなる：

$$E = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{int}} \tag{E.20}$$

ただし、

$$E_{\mathrm{kin}} \equiv \int \frac{\hbar^2}{2m} \left|\nabla \Phi(\boldsymbol{r})\right|^2 d\boldsymbol{r} \tag{E.21}$$

$$E_{\mathrm{pot}} \equiv \int V_{\mathrm{trap}}(\boldsymbol{r}) \left|\Phi(\boldsymbol{r})\right|^2 d\boldsymbol{r} \tag{E.22}$$

$$E_{\mathrm{int}} \equiv \int \frac{U_0}{2} \left|\Phi(\boldsymbol{r})\right|^4 d\boldsymbol{r} \quad . \tag{E.23}$$

ビリアル定理*より、$E_{\mathrm{kin}}, E_{\mathrm{pot}}, E_{\mathrm{int}}$ の間には以下の関係がある：

$$2E_{\mathrm{kin}} - 2E_{\mathrm{pot}} + 3E_{\mathrm{int}} = 0 . \tag{E.24}$$

また，時間に依存しないグロス・ピタエフスキー方程式（E.9）の両辺に左から $\boldsymbol{\Phi}^*(\boldsymbol{r})$ をかけ，全空間にわたって積分すると，

$$\int d\boldsymbol{r} \Phi^*(\boldsymbol{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{trap}(\boldsymbol{r}) + U_0 \left|\Phi(\boldsymbol{r})\right|^2 \right] \Phi(\boldsymbol{r}, t) = \mu \int \left|\Phi(\boldsymbol{r})\right|^2 d\boldsymbol{r}$$

$$\Leftrightarrow E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} + 2E_{\mathrm{int}} = \mu N \tag{E.25}$$

このように、$E_{\mathrm{kin}}, E_{\mathrm{pot}}, E_{\mathrm{int}}$ 間の関係式が得られる．

　今、トーマス・フェルミ近似が成り立つとすると、運動エネルギーの項を無視できるので、式（E,24)、(E.25）から $E_{\mathrm{pot}}, E_{\mathrm{int}}$ に関する連立方程式が得られ、$E_{\mathrm{pot}}, E_{\mathrm{int}}$ が求まる：

$$\begin{cases} -2E_{\mathrm{pot}} + 3E_{\mathrm{int}} = 0 \\ E_{\mathrm{pot}} + 2E_{\mathrm{int}} = \mu N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E_{\mathrm{pot}} = \dfrac{3}{7} \mu N \\ E_{\mathrm{int}} = \dfrac{2}{7} \mu N \end{cases} \tag{E.26}$$

よって、全エネルギー E は

---

*　x 方向にスケール変換した波動関数 $\Phi(x, y, z) \to (1+\nu)^{1/2} \Phi\left[(1+\nu)x, y, z\right]$ を式（E.19）に代入し，ν の一次で $<\hat{H}>$ の変分がゼロとおくと，関係式 $(E_{\mathrm{kin}})_x - (E_{\mathrm{pot}})_x + E_{\mathrm{int}}/2 = 0$ が得られる．y, z 方向に関しても同様の関係式が得られ，それらの和をとると，式（E.24）が得られる．

$$E = E_{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{int}} = \frac{5}{7}\mu N \tag{E.27}$$

となる．更に μ の具体形（E.14）を代入すると、

$$E = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}\hbar\overline{\omega}\left(15aN\sqrt{\frac{m\overline{\omega}}{\hbar}}\right)^{2/5} N = 1.06(a\hbar^2\overline{\omega}^3 m^{1/2})^{2/5} N^{7/5} \quad . \tag{E.28}$$

と表せる．この式から、化学ポテンシャル $\dfrac{dE}{dN}$ は、確かに μ にであることがわかる：

$$\frac{dE}{dN} = \frac{1}{2}\hbar\overline{\omega}\left(15a\sqrt{\frac{m\overline{\omega}}{\hbar}}\right)^{2/5} N^{2/5} = \mu \quad . \tag{E.29}$$

トーマス・フェルミ近似におけるボース凝縮体の諸パラメーターを、粒子数 N に対する依存性に着目してまとめると、表 E.1 のようになる.

パラメーター	長さ	体積	密度	エネルギー	一粒子当たりのエネルギー
変数	d	$V \propto d^3$	$n \propto N/V$	$E \propto n^2 V$	$\mu \propto E/N$
N 依存性	$N^{1/5}$	$N^{3/5}$	$N^{2/5}$	$N^{7/5}$	$N^{2/5}$

表 E.1　ボース凝縮体の諸パラメーターの粒子数 N 依存性

E. 4　ボース凝縮体の密度分布の時間発展

ここでは、参考論文[48]に従って、トーマス・フェルミ近似が成り立つ場合における、ボース凝縮体の波動関数の時間発展について考える．外部ポテンシャルとして、時間に依存する非等方的三次元調和ポテンシャルを考える：

$$V_{trap}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}m\left[\omega_x^2(t)x^2 + \omega_y^2(t)y^2 + \omega_z^2(t)z^2\right] \quad . \tag{E.30}$$

今、ボース凝縮体を、粒子数密度 $n(\boldsymbol{r},t) = |\Phi(\boldsymbol{r},t)|^2$ をもった古典的な気体と考える．グロス・ピタエフスキー方程式（E.6）より、位置 $\boldsymbol{r}$ にある粒子は、実効的に、ポテンシャルエネルギー「$V_{trap}(\boldsymbol{r},t) + U_0\,|\Phi(\boldsymbol{r},t)|^2$」を持っているので、以下の力を受ける：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) = -\nabla\left(V_{\text{trap}}(\boldsymbol{r},t) + U_0 n(\boldsymbol{r},t)\right) \tag{E.31}$$

今、時刻 $t=0$ では、ボース凝縮体は定常状態にあるとする．このとき、$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},0)=0$ であるので、

$$-\nabla V_{\text{trap}}(\boldsymbol{r},0) = U_0 \nabla n(\boldsymbol{r},0) \tag{E.32}$$

が成立する．これは外部ポテンシャルからの力と、平均場（斥力）相互作用による力が釣り合っている状況を表している．

ここで、一つの仮定をする．時刻 $t=0$ に、任意の位置 $\boldsymbol{R}(0)=(x_0, y_0, z_0)$ にあった粒子は、後の時刻に、

$$\boldsymbol{R}(t) = (\lambda_x(t)x_0, \lambda_y(t)y_0, \lambda_z(t)z_0) \qquad （\lambda_x(0)=\lambda_y(0)=\lambda_z(0)=1） \tag{E.33}$$

へ移動するとする．つまり単にスケールのみが変わるとする．このとき、一般に時刻 t 、位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ における密度分布は、

$$\begin{aligned} n(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{\lambda_x(t)\lambda_y(t)\lambda_z(t)} n\left[\left(\frac{x}{\lambda_x(t)}, \frac{y}{\lambda_y(t)}, \frac{z}{\lambda_z(t)}\right), 0\right] \\ &= \frac{\mu - \frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{\omega_x(0)x}{\lambda_x(t)}\right)^2 + \left(\frac{\omega_y(0)y}{\lambda_y(t)}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z(0)z}{\lambda_z(t)}\right)^2\right\}}{U_0\lambda_x(t)\lambda_y(t)\lambda_z(t)} \end{aligned} \tag{E.34}$$

と表せる．

一方、初期位置 $\boldsymbol{R}(0)=(x_0, y_0, z_0)$ にあった粒子の運動の軌跡 $\boldsymbol{R}(t)$ は、ニュートンの運動方程式に従わなければならない：

$$m\frac{d^2\boldsymbol{R}(t)}{dt^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}(t),t)\,. \tag{E.35}$$

式（E.33）で仮定した $\boldsymbol{R}(t)$ より，左辺を計算すると、

$$m\frac{d^2\boldsymbol{R}(t)}{dt^2}=m\left(\frac{d^2\lambda_x(t)}{dt^2}x_0,\frac{d^2\lambda_y(t)}{dt^2}y_0,\frac{d^2\lambda_z(t)}{dt^2}z\right). \tag{E.36}$$

また，式（E.32）～（E.34）を用いて右辺を計算すると、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}(t),t) &= -\nabla\left(V_{\mathrm{trap}}(\boldsymbol{r},t)+U_0 n(\boldsymbol{r},t)\right)\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}(t)} \\
&= -\nabla V_{\mathrm{trap}}(\boldsymbol{r},t)\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}(t)} - \frac{1}{\lambda_x(t)\lambda_y(t)\lambda_z(t)}\nabla U_0 n\left[\left(\frac{x}{\lambda_x(t)},\frac{y}{\lambda_y(t)},\frac{z}{\lambda_z(t)}\right),0\right]\Bigg|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}(t)} \\
&= -\nabla V_{\mathrm{trap}}(\boldsymbol{r},t)\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}(t)} + \frac{1}{\lambda_x(t)\lambda_y(t)\lambda_z(t)}\nabla V_{\mathrm{trap}}\left[\left(\frac{x}{\lambda_x(t)},\frac{y}{\lambda_y(t)},\frac{z}{\lambda_z(t)}\right),0\right]\Bigg|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}(t)} \\
&= -m\left(\omega_x^2(t)x,\omega_y^2(t)y,\omega_z^2(t)z\right)\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}(t)} \\
&\qquad + \frac{m}{\lambda_x(t)\lambda_y(t)\lambda_z(t)}\left(\frac{\omega_x^2(0)x}{\lambda_x^2(t)},\frac{\omega_y^2(0)y}{\lambda_y^2(t)},\frac{\omega_z^2(0)z}{\lambda_z^2(t)}\right)\Bigg|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}(t)} \\
&= -m\left(\omega_x^2(t)\lambda_x(t)x_0,\omega_y^2(t)\lambda_y(t)y_0,\omega_z^2(t)\lambda_z(t)z_0\right) \\
&\qquad + \frac{m}{\lambda_x(t)\lambda_y(t)\lambda_z(t)}\left(\frac{\omega_x^2(0)x_0}{\lambda_x(t)},\frac{\omega_y^2(0)y_0}{\lambda_y(t)},\frac{\omega_z^2(0)z_0}{\lambda_z(t)}\right).
\end{aligned} \tag{E.37}$$

式（E.36）と（E.37）の各成分は等しくなければならないので，

$$\frac{d^2\lambda_i(t)}{dt^2}=\frac{\omega_i^2(0)}{\lambda_i\lambda_x\lambda_y\lambda_z}-\omega_i^2(t)\lambda_i \quad (i=x,y,z) \tag{E.38}$$

が成立する．この式は、粒子の初期位置 $\boldsymbol{R}(0)$ に依らないので、最初に仮定した式（E.33）が、自己無撞着な解になっていたことがわかる．式（E.33）は，外部ポテンシャルが調和型のときのみ成立する．以上の結果は、古典的な気体のモデルより導かれたが、同じ結果が，時間に依存するグロス・ピタエフスキー方程式より導かれることが知られている[48].

軸対称ポテンシャル $\omega_x(t)=\omega_y(t)\equiv\omega_\rho(t)>>\omega_z(t)$ の場合、式（E.38）は、

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\lambda_\rho(t)}{dt^2} = \dfrac{\omega_\rho^2(0)}{\lambda_\rho^3\lambda_z} - \omega_\rho^2(t)\lambda_\rho \\ \dfrac{d^2\lambda_z(t)}{dt^2} = \dfrac{\omega_z^2(0)}{\lambda_\rho^2\lambda_z^2} - \omega_z^2(t)\lambda_z \end{cases} . \tag{E.39}$$

となる．ここで，$\lambda_\rho(t) \equiv \lambda_x(t) = \lambda_y(t)$ とした．特に、時刻 $t=0$ で、瞬間的に外部ポテンシャルを切った場合、つまり

$$\omega_\rho(t) = \begin{cases} \omega_\rho & (t=0) \\ 0 & (t>0) \end{cases} \quad , \quad \omega_z(t) = \begin{cases} \omega_z & (t=0) \\ 0 & (t>0) \end{cases}$$

のとき、式（E.39）は、無次元の時間変数 $\tau \equiv \omega_\rho t$ と、パラメーター $\varepsilon \equiv \omega_z / \omega_\rho << 1$ を用いて、

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\lambda_\rho(\tau)}{d\tau^2} = \dfrac{1}{\lambda_\rho^3\lambda_z} \\ \dfrac{d^2\lambda_z(\tau)}{d\tau^2} = \dfrac{\varepsilon^2}{\lambda_\rho^2\lambda_z^2} \end{cases} \tag{E.40}$$

と表せる．初期条件は $\lambda_\rho(0) = \lambda_z(0) = 1$ および $\dot{\lambda}_\rho(0) = \dot{\lambda}_z(0) = 0$ である．この連立微分方程式を，ε を展開パラメーターとする逐次近似法で解く．$\lambda_\rho(\tau)$ に関しては ε の 0 次，$\lambda_z(\tau)$ に関しては ε の 2 次までとる近似では,

$$\begin{cases} \lambda_\rho(\tau) = \sqrt{1+\tau^2} \\ \lambda_z(\tau) = 1 + \varepsilon^2\left[\tau \arctan\tau - \ln\sqrt{1+\tau^2}\right] \end{cases} \tag{E.41}$$

となる.

時刻 t におけるボース凝縮体の ρ 方向（x, y 方向）および z 方向の半幅 $d_\rho(t),\ d_z(t)$ は、初期の半幅（式（E,17））に，式（E.41）の因子をそれぞれかければ得られる：

$$
\begin{aligned}
d_\rho(t) &= \lambda_\rho(t)\sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_\rho^2}} \\
d_z(t) &= \lambda_z(t)\sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_z^2}} \quad .
\end{aligned}
\tag{E.42}
$$

よって、時刻 t でのボース凝縮体のアスペクト比 $\varepsilon(t) \equiv d_\rho(t)/d_z(t)$ は、

$$
\varepsilon(t) = \frac{d_\rho(t)}{d_z(t)} = \varepsilon(0)\frac{\lambda_\rho(t)}{\lambda_z(t)} \tag{E.43}
$$

ただし、

$$
\varepsilon(0) = \varepsilon = \frac{\omega_z}{\omega_\rho} \quad . \tag{E.44}
$$

ボース凝縮体の ρ 方向および z 方向の拡散の速さ（速度分布の半幅） $v_\rho(t),\ v_z(t)$ は、

$$
\begin{aligned}
v_\rho(t) &= \frac{d}{dt}d_\rho(t) = \frac{d}{dt}\lambda_\rho(t)\sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_\rho^2}} = v_{\rho,\infty}\cdot\frac{\omega_\rho t}{\sqrt{1+\omega_\rho^2 t^2}} \\
v_z(t) &= \frac{d}{dt}d_z(t) = \frac{d}{dt}\lambda_z(t)\sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_z^2}} = v_{z,\infty}\cdot\frac{2}{\pi}\arctan\omega_\rho t
\end{aligned}
\tag{E.45}
$$

ここで、$v_{\rho,\infty}, v_{z,\infty}$ は ρ 方向、 z 方向の漸近速度で、

$$
\begin{aligned}
v_{\rho,\infty} &= \omega_\rho d_\rho(0) \\
v_{z,\infty} &= \frac{\pi}{2}\omega_\rho \varepsilon^2 d_z(0)
\end{aligned}
\tag{E.46}
$$

と表される． ρ 方向の漸近速度を用いて，形式的に運動エネルギーを計算してみると，化学ポテンシャル μ になる：

$$
\frac{1}{2}mv_{\rho,\infty}^2 = \frac{1}{2}m\omega_\rho^2 d_\rho^2(0) = \mu\,. \tag{E.47}
$$

このことは，ボース凝縮体のエネルギー$E=5\mu/7$（１粒子当り）が，主に ρ 方向の運動エネルギーに変換されることを意味する．

漸近速度の比$v_{\rho,\infty}/v_{z,\infty}$は、アスペクト比$\varepsilon(t)$の漸近値と一致する：

$$\frac{v_{\rho,\infty}}{v_{z,\infty}}=\frac{2}{\pi\varepsilon}=\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)\quad . \tag{E.48}$$

E. 5　3次元調和ポテンシャル中の理想ボース凝縮体

ここでは、３次元調和ポテンシャル中の理想ボース凝縮体、つまり粒子間相互作用のないボース凝縮体の波動関数を考える．時間に依存しないグロス・ピタエフスキー方程式（E.7）より、相互作用の項を除くと、

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\frac{1}{2}m(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2)\right]\Phi(\boldsymbol{r})=\mu\Phi(\boldsymbol{r})\quad . \tag{E.49}$$

となり、一粒子のシュレーディンガー方程式に帰着する．ただし、$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})$の規格化条件は、

$$\int\left|\Phi(\boldsymbol{r})\right|^2 d\boldsymbol{r}=N \tag{E.50}$$

である．調和振動子のシュレーディンガー方程式（E.49）の解はよく知られており、粒子数密度分布$n(\boldsymbol{r})=|\Phi(\boldsymbol{r})|^2$は、以下のガウシアン型になる：

$$n(\boldsymbol{r})=\frac{N}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z}\exp\left[-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x{}^2}+\frac{y^2}{2\sigma_y{}^2}+\frac{z^2}{2\sigma_z{}^2}\right)\right]. \tag{E.51}$$

ここで、

$$\sigma_i=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_i}} \tag{E.52}$$

は、密度分布の各方向$(i=x,y,z)$の rms (root mean square) 幅である．速度分布$\tilde{n}(\boldsymbol{v})$も、同様にガウシアン型になる：

$$\tilde{n}(\boldsymbol{v}) = \frac{N}{(2\pi)^{3/2}\sigma_{v_x}\sigma_{v_y}\sigma_{v_z}} \exp\left[-\left(\frac{{v_x}^2}{2{\sigma_{v_x}}^2} + \frac{{v_y}^2}{2{\sigma_{v_y}}^2} + \frac{{v_z}^2}{2{\sigma_{v_z}}^2}\right)\right] \tag{E.53}$$

ここで

$$\sigma_{v_i} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_i}{2m}} \tag{E.54}$$

は、各方向の rms 速度である．ボース凝縮体のエネルギー（零点エネルギー） μ は、

$$\mu = \frac{1}{2}\hbar(\omega_x + \omega_y + \omega_z) \tag{E.55}$$

となる．

時刻 $t = 0$ でポテンシャルを切った後、拡散するボース凝縮体の密度分布も、またガウシアン型であり、その rms 幅 $\sigma_i(t)$ は、

$$\sigma_i(t) = \sqrt{{\sigma_i}^2 + \sigma_{v_i}^2 t^2} = \sigma_i\sqrt{1+\omega_i^2 t^2} \tag{E.56}$$

と表せる．特に、軸対称ポテンシャル $\omega_x = \omega_y \equiv \omega_\rho$ の場合、密度分布の ρ 方向（x,y 方向）と z 方向のアスペクト比 $\varepsilon(t) = \sigma_\rho(t)/\sigma_z(t)$ は、

$$\varepsilon(t) = \frac{\sqrt{\hbar/m\omega_\rho}\sqrt{1+\omega_\rho^2 t^2}}{\sqrt{\hbar/m\omega_z}\sqrt{1+\omega_z^2 t^2}} = \varepsilon(0)\sqrt{\frac{1+\omega_\rho^2 t^2}{1+\omega_z^2 t^2}} \tag{E.57}$$

ただし、

$$\varepsilon(0) = \sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_\rho}} \tag{E.58}$$

となる． $\varepsilon(t)$ の漸近値 $\varepsilon(\infty) \equiv \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)$ は以下のように初期のアスペクト比の逆数になる：

$$\varepsilon(\infty) = \sqrt{\frac{\omega_\rho}{\omega_z}} = \frac{1}{\varepsilon(0)} \quad . \tag{E.59}$$