付録D　散乱理論

D. 1 リップマン･シュウィンガー方程式

二粒子間のポテンシャルが、互いの相対位置$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$のみに依存する異種粒子間の二体衝突を考える（D.5 で同種粒子の場合を議論する）．そのポテンシャルを$U=U(\boldsymbol{r})$、粒子の質量は共にmとする．一方の粒子から見た、もう片方の粒子の状態ベクトル$|\psi>$は、以下のシュレーディンガー方程式の解である：

$$\left[H_0+U\right]|\psi>=E|\psi> \ . \tag{D.1}$$

ここで、H_0は、自由粒子のハミルトニアン

$$H_0=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 \tag{D.2}$$

で、μは換算質量

$$\mu=\frac{mm}{m+m}=\frac{m}{2} \tag{D.3}$$

である．

式（D.1）において、$U=0$のとき、つまり自由粒子の場合の解（固有ベクトル）を$|\phi>$とする．これは、以下のように波数ベクトル$\boldsymbol{k}$の入射平面波を表すとする：

$$<\boldsymbol{r}|\phi>\equiv\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \ . \tag{D.4}$$

ここで、式（D.1）の解$|\psi>$を（入射波）＋（散乱波）という形で表現することにする、つまり$|\psi>=|\phi>+X$とする．以下のようにXを置けば、$|\psi>$は式（D.1）を満足することがわかる：

$$|\psi>=|\phi>+\frac{1}{E-H_0}U|\psi> . \tag{D.5}$$

この式は、両辺に$|\psi>$が入っているので、$|\psi>$に関するケット方程式である．後の計算（留数積分）を可能にするため、以下のようにエネルギーをわずかに複素数にする：

$$|\psi^{(\pm)}>=|\phi>+\frac{1}{E\pm i\varepsilon-H_0}U|\psi^{(\pm)}>\ . \tag{D.6}$$

ここで、ε は無限小の数とする. この方程式は、**リップマン・シュウィンガー方程式**と呼ばれる. 後ほど、$|\psi^{(+)}>$ のみが意味のある解であることがわかる.

式（D.6）の両辺に、左から $<\boldsymbol{r}|$ をかけると、波動関数 $<\boldsymbol{r}|\psi^{(\pm)}>\equiv\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r})$ に関する積分方程式が得られる：

$$\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\int d\boldsymbol{r}'<\boldsymbol{r}\left|\frac{1}{E-H_0\pm i\varepsilon}\right|\boldsymbol{r}'><\boldsymbol{r}'|U|\psi^{(\pm)}>. \tag{D.7}$$

式（D.7）の右辺の積分を計算する. まず、$<\boldsymbol{r}\left|\frac{1}{E-H_0\pm i\varepsilon}\right|\boldsymbol{r}'>$ は、

$$\begin{aligned}<\boldsymbol{r}\left|\frac{1}{E-H_0\pm i\varepsilon}\right|\boldsymbol{r}'>&=\int\int d\boldsymbol{p}'d\boldsymbol{p}''<\boldsymbol{r}|\boldsymbol{p}'><\boldsymbol{p}'\left|\frac{1}{E-H_0\pm i\varepsilon}\right|\boldsymbol{p}''><\boldsymbol{p}''|\boldsymbol{r}'>\\&=\int\int d\boldsymbol{p}'d\boldsymbol{p}''\frac{\exp(i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}/\hbar)}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{\delta(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}'')}{E-\left(p'^2/2\mu\right)\pm i\varepsilon}\frac{\exp(-i\boldsymbol{p}''\cdot\boldsymbol{r}/\hbar)}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\\&=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d\boldsymbol{p}'\frac{\exp[i\boldsymbol{p}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/\hbar]}{E-\left(p'^2/2\mu\right)\pm i\varepsilon}\quad .\end{aligned}$$

ここで、E とは入射波のエネルギーなので、入射波の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の大きさを k として、$\hbar^2k^2/2\mu$ と書く. また、運動量ベクトル $\boldsymbol{p}'$ を、波数ベクトル $\boldsymbol{k}'\equiv\boldsymbol{p}'/\hbar$ で表すことにする. $\boldsymbol{k}'$ に関する積分を、$\boldsymbol{k}'$ と $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ のなす角を θ とする極座標で実行すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d\boldsymbol{p}'\frac{\exp[i\boldsymbol{p}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/\hbar]}{E-\left(p'^2/2\mu\right)\pm i\varepsilon}&=\frac{2\mu}{(2\pi)^3\hbar^2}\int_0^\infty dk'k'^2\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\pi d\theta\sin\theta\frac{\exp[ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta]}{k^2-k'^2\pm i\varepsilon'}\\&=\frac{2\mu}{(2\pi)^2\hbar^2}\int_0^\infty dk'k'^2\int_{-1}^{+1}d(\cos\theta)\frac{\exp[ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta]}{k^2-k'^2\pm i\varepsilon'}\\&=\frac{2\mu}{(2\pi)^2\hbar^2}\frac{1}{i|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^\infty dk'k'\frac{\exp[ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]-\exp[-ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]}{k'^2-k^2\mp i\varepsilon'}\\&=-\frac{2\mu}{(2\pi)^2\hbar^2}\frac{1}{i|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_{-\infty}^\infty dk'\frac{k'\exp[ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]}{\left(k'+k\sqrt{1\pm i\varepsilon'/k^2}\right)\left(k'-k\sqrt{1\pm i\varepsilon'/k^2}\right)}\\&=-\frac{2\mu}{4\pi\hbar^2}\frac{\exp[\pm ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\quad .\end{aligned}$$

(D.8)

次に、$<\boldsymbol{r}'|U|\psi^{(\pm)}>$を計算する．$U$ が位置演算子のみの関数であるので、

$$<\boldsymbol{r}'|U|\boldsymbol{r}''>=U(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'') \tag{D.9}$$

が成り立つことに注意して、

$$\begin{aligned}<\boldsymbol{r}'|U|\psi^{(\pm)}> &= \int d\boldsymbol{r}''<\boldsymbol{r}'|U|\boldsymbol{r}''><\boldsymbol{r}''|\psi^{(\pm)}> \\ &= \int d\boldsymbol{r}''U(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'')\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r}'') \\ &= U(\boldsymbol{r}')\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r}') \quad .\end{aligned} \tag{D.10}$$

以上の結果をまとめると、

$$\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \frac{2\mu}{\hbar^2}\int d\boldsymbol{r}'\frac{\exp\left[\pm ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right]}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}U(\boldsymbol{r}')\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r}') \quad . \tag{D.11}$$

この $\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{r})$ に関する積分方程式のことを、リップマン・シュウィンガー方程式と呼ぶこともある．式（D.11）から、散乱波は、散乱体の各点 $\boldsymbol{r}'$ を中心とする球面波

$$G_{\pm}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \equiv -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{D.12}$$

を、$(2\mu/\hbar^2)V(\boldsymbol{r}')\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r}')$ という因子を付けて、散乱体全体にわたり足し合わせたもの、と解釈できる（$G_{\pm}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ はグリーン関数と呼ばれる）．実際の散乱過程では、散乱波は散乱体から外向きに進行するので、$G_{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ のみが現実的に意味がある．そこで、今後は、式（D.11）の解として、$\psi^{(+)}(\boldsymbol{r}')$ のみを考えることにする．

式（D.11）右辺の $\boldsymbol{r}'$ に関する積分は、$U(\boldsymbol{r}')$ が有意義な値をもつ範囲内だけで行えばよい．今、そのような範囲からずっと離れた位置 $\boldsymbol{r}$ での波動関数の挙動を考える．つまり、$|\boldsymbol{r}|>>|\boldsymbol{r}'|$ とする．このとき、$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \cong r-\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'$ （$r\equiv|\boldsymbol{r}|$, $\hat{\boldsymbol{r}}\equiv\boldsymbol{r}/r$ ）と近似できるので、$G_{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ は、

$$G_{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cong -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'} \tag{D.13}$$

と近似できる．ここで、$\boldsymbol{k}'\equiv k\hat{\boldsymbol{r}}$ と定義した．この近似式を、式（D.11）に代入すると、

$$\psi^{(+)}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \frac{2\mu}{4\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int d\boldsymbol{r}'\, e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}U(\boldsymbol{r}')\psi^{(+)}(\boldsymbol{r}')$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\boldsymbol{k}')\right] \tag{D.14}$$

ただし、

$$f(\boldsymbol{k}') = -\frac{2\mu}{4\pi\hbar^2}(2\pi)^3\int d\boldsymbol{r}' \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}U(\boldsymbol{r}')\psi^{(+)}(\boldsymbol{r}'). \tag{D.15}$$

微分断面積 $d\sigma / d\Omega$ は、入射する粒子数に対する微小立体角要素 $d\Omega$ へ散乱される粒子数の比で定義される．それは、入射波と、$r = 1$ における散乱波の波動関数の絶対値の自乗（粒子の存在確率）の比であるので、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f(\boldsymbol{k}')\right|^2 \tag{D.16}$$

でと表される．よって、$f(\boldsymbol{k}')$ は、散乱振幅と呼ばれる．全断面積 σ は、散乱振幅の絶対値の自乗を全立体角にわたって積分すると求まる：

$$\sigma = \int \left| f(\boldsymbol{k}')\right|^2 d\Omega. \tag{D.17}$$

D. 2　ボルン近似

式（D.15）の $f(\boldsymbol{k}')$ には、依然、未知の波動関数 $\psi^{(+)}(\boldsymbol{r}')$ が含まれているので、このままでは微分断面積を計算できない．そこで、入射波の振幅に対して、散乱波の振幅が十分小さいと仮定し、$f(\boldsymbol{k}')$ の積分の中に現れる $\psi^{(+)}(\boldsymbol{r}')$ を、入射波の波動関数で置きかえる近似をする：

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{k}') &\cong -\frac{2\mu}{4\pi\hbar^2}(2\pi)^3\int d\boldsymbol{r}' \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}U(\boldsymbol{r}')\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'} \\ &= -\frac{2\mu}{4\pi\hbar^2}\int d\boldsymbol{r}'\, e^{-i(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}'}U(\boldsymbol{r}'). \end{aligned} \tag{D.18}$$

これは、**ボルン近似**と呼ばれる．式（D.18）より、$\boldsymbol{k}'$ 方向への散乱振幅は、散乱ポテンシャル $U(\boldsymbol{r}')$ の、粒子の運動量変化 $\Delta\boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}$ に関するフーリエ変換に比例することがわかる．

散乱ポテンシャル$U(\boldsymbol{r}')$の広がりが、入射波の波長に比べて無視できるほど小さいとする（この状況は、後に説明するＳ波散乱の場合に対応する）．このとき、$e^{-i(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}'}\cong 1$と近似できるので、

$$f(\boldsymbol{k}')\cong -\frac{2\mu}{4\pi\hbar^2}U_0 \tag{D.19}$$

ただし、

$$U_0=\int d\boldsymbol{r}'U(\boldsymbol{r}') \tag{D.20}$$

となる．つまり、散乱振幅は散乱方向に依存しなくなる．しかも、ポテンシャルの具体的形状には依らず、単にポテンシャルの空間積分U_0（付録 C の式（C.31）のU_0と同じものである）に比例する．

D. 3　散乱振幅の部分波表現

波数ベクトル$\boldsymbol{k}$の入射平面波は、以下のようにルジャンドル多項式$P_l(\cos\theta)$＊によって級数展開できる：

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)\,. \tag{D.21}$$

ここで、θは$\boldsymbol{k}$と$\boldsymbol{r}$のなす角である．j_lはl次の球ベッセル関数で、$u_l(r)=r\cdot j_l(kr)$は、波動関数の動径部分に関する自由粒子のシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{d}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u_l(r)=\frac{\hbar^2k^2}{2\mu}u_l(r) \tag{D.22}$$

の解である．$j_l(kr)$は、rが大きいとき、

$$j_l(kr)\overset{r大}{\cong}\frac{1}{kr}\sin(kr-l\pi/2)=\frac{1}{2ik}\left[\frac{e^{i(kr-l\pi/2)}}{r}-\frac{e^{-i(kr-l\pi/2)}}{r}\right] \tag{D.23}$$

と近似できる．

散乱ポテンシャル$U(\boldsymbol{r})$が球対称の場合、確率振幅$f(\boldsymbol{k}')$は$\boldsymbol{k}$（入射方向）と$\boldsymbol{k}'$（散乱

＊　$P_l(\cos\theta)=\dfrac{(-1)^l}{2^l l!}\dfrac{d^l(1-\cos^2\theta)^l}{d(\cos\theta)}$

方向）のなす角θにのみ依存するので、以下のようにルジャンドル多項式による級数展開ができる：

$$f(\boldsymbol{k}') \equiv f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos\theta)\,. \qquad \text{(D.24)}$$

f_l は、**部分波振幅**と呼ばれる．各 f_l を定める処方は後に説明する．

　式（D.21）、（D.24）より、式（D.14）によって表される$\psi^{(+)}(\boldsymbol{r})$も、以下のようにルジャンドル多項式で級数展開できる：

$$\psi^{(+)}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{1}{2ik} \left[\left(1+2ikf_l\right) \frac{e^{i(kr-l\pi/2)}}{r} - \frac{e^{-i(kr-l\pi/2)}}{r} \right] P_l(\cos\theta) \qquad \text{(D.25)}$$

このように、$\psi^{(+)}(\boldsymbol{r})$は、それぞれの$l$において、外向き球面波と内向き球面波の和に分解できる．粒子の湧き出しや吸い込みはないので、これらの振幅の大きさは同じでなくてはいけない．つまり、これらは位相のみが違ってよい．その位相差を$2\delta_l$とすると、外向き球面波の係数（$1+2ikf_l$）は、

$$1+2ikf_l = e^{2i\delta_l} \qquad \text{(D.26)}$$

と表されなければならない．これを（D.25）に代入すると,

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{1}{2ik} \left[e^{2i\delta_l} \frac{e^{i(kr-l\pi/2)}}{r} - \frac{e^{-i(kr-l\pi/2)}}{r} \right] P_l(\cos\theta) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{e^{i\delta_l}}{kr} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) P_l(\cos\theta) \end{aligned} \qquad \text{(D.27)}$$

となり、これは入射平面波の展開式（D.21）の球ベッセル関数$j_l(kr)$の位相をδ^lだけシフトさせたものであることがわかる．つまり、球対称ポテンシャルの存在によって、動径方向の波動関数の位相$u_l(r)$が、以下のようにδ^lだけシフトしたと解釈できる：

$$u_l(r)\left(= rj_l(kr)\right) \overset{r\text{大}}{\cong} \frac{1}{k}\sin(kr - l\pi/2) \xrightarrow{\text{位相差}\delta_l} \frac{e^{i\delta_l}}{k}\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \qquad \text{(D.28)}$$

この位相シフトは、球対称ポテンシャル$U(r)$がある場合の、波動関数の動径部分に関するシュレーディンガー方程式

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{d}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]+U(r)\right\}u_l(r)=\frac{\hbar^2k^2}{2\mu}u_l(r) \tag{D.29}$$

（このとき、もはや$u_l(r)=r\cdot j_l(kr)$ではない）を具体的に解き、ポテンシャルがない場合の解、つまり$r\cdot j_l(kr)$と比較することにより求めることができる．位相差δ_lが求まれば、部分波振幅は式（D.26）より

$$f_l=\frac{e^{i\delta_l}\sin\delta_l}{k} \tag{D.30}$$

と表される．全散乱断面積σを計算すると、

$$\begin{aligned}\sigma&=\int\left|f(\theta)\right|^2d\Omega\\&=\frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\sum_l\sum_{l'}(2l+1)(2l'+1)e^{i(\delta_l-\delta_{l'})}\sin\delta_l\sin\delta_{l'}P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)\\&=\frac{4\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)\sin^2\delta_l\end{aligned} \tag{D.31}$$

となる．計算において，球面調和関数の直交性**を用いた．

D. 4　S波散乱と散乱半径

式（D.29）より，l番目の動径波動関数$u_l(r)$に対する有効ポテンシャルは

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2}+U(r) \tag{D.32}$$

となる．半古典的に考えると，入射エネルギー$\frac{\hbar^2k^2}{2\mu}$の粒子は，$r\approx\sqrt{l(l+1)}\lambda\!\!\!^{-}$（$\lambda\!\!\!^{-}\equiv k^{-1}$）

** 球面調和関数 $Y_l^m(\theta,\phi)\equiv(-1)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$ は，次の直交関係を見たす：
$\int Y_{l'}^{m'}*(\theta,\phi)Y_l^m(\theta,\phi)\,d\Omega=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$　．

までしか進入できない．今，散乱ポテンシャル$U(r)$の到達範囲が入射波の波長λに比べ十分短かい場合を考えると，$l \neq 0$の動径波動関数$u_l(r)$は散乱ポテンシャルの存在をほとんど感じることができない．しかし，$l = 0$の動径波動関数$u_0(r)$は，散乱ポテンシャルを感じることができるので，位相差δ_0が生じる．そして，結果的に全散乱断面積σに寄与するのは，$l = 0$の散乱（**S 波散乱**）だけになる：

$$\sigma = 4\pi \left(\frac{\sin \delta_0}{k} \right)^2 . \tag{D.33}$$

散乱断面積を簡単に計算できる一つの例として，半径Rの剛体球による散乱を考える．波動関数は$r = R$で必ずゼロになり，$r > R$では自由空間のシュレーディンガー方程式（D.22）に従う．よって，波動関数は，剛体球がない場合と比べ，単に原点がRだけずれたものになる：

$$u_0(r) \overset{r大}{\cong} \frac{1}{k}\sin(kr) \xrightarrow{\text{半径Rの剛体球}} \frac{1}{k}\sin\big(k(r-R)\big) = \frac{1}{k}\sin(kr+\delta_0) \tag{D.34}$$

ただし，

$$\delta_0 = -kR . \tag{D.35}$$

このように，位相差δ_0は，入射波の波長$\lambda = 2\pi / k$に対するRの比（に2πをかけたもの）になる．半径Rが入射波の波長λに比べて十分小さいとき（S 波散乱のとき），$\delta_0 << 1$が成り立ち，（D.33）の全散乱断面積は，

$$\sigma = 4\pi \lim_{\delta_0 \to 0} \left(\frac{\sin \delta_0}{k} \right)^2 = 4\pi \left(\frac{\delta_0}{k} \right)^2 = 4\pi R^2 \tag{D.36}$$

となる．これは剛体の幾何学的断面積πR^2の 4 倍である．

ここで，剛体球による散乱のアナロジーで，S 波散乱による動径波動関数$u_0(r)$の位相のずれδ_0が，実効的に$u_0(r)$の原点（$u_0(r) = 0$の点）をどれだけずらすか，を考える．位相差δ_0を持った動径波動関数$u_0(r)$は，式（D.28）より，

$$u_0(r) \overset{r\text{大}}{\cong} e^{i\delta_0}\,\frac{\sin(kr+\delta_0)}{k} \tag{D.37}$$

と表される．式（D.37）の $k \to 0$ での極限（低エネルギー極限）は，以下のようになる：

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0} e^{i\delta_l}\,\frac{\sin(kr+\delta_0)}{k} &= e^{i\delta_0}\cos\delta_0 \lim_{k\to 0}\left(\frac{\sin kr}{k}+\frac{\tan\delta_0}{k}\cos kr\right)\\ &= e^{i\delta_0}\cos\delta_0\left(r+\lim_{k\to 0}\frac{\tan\delta_0}{k}\right)\\ &= e^{i\delta_0}\cos\delta_0 (r-a)\ .\end{aligned} \tag{D.38}$$

ここで，

$$a \equiv -\lim_{k\to 0}\frac{\tan\delta_0}{k}\ . \tag{D.39}$$

と定義した．このように，$u_0(r)$ は $r=a$ を原点とする直線になる．この a を**散乱半径**または**散乱長**と呼ぶ．S 波散乱の散乱振幅 f_0 の $k \to 0$ での極限値は，散乱半径 a の符号を変えたものあることがわかる：

$$\lim_{k\to 0} f_0 = \lim_{k\to 0}\left(\frac{e^{i\delta_l}\sin\delta_0}{k}\right) = \lim_{k\to 0}\left(\frac{1}{k\cot\delta_0 - ik}\right) = -a \quad . \tag{D.40}$$

よって，全散乱断面積は，

$$\sigma = \int |f_0|^2 d\Omega = 4\pi a^2 \tag{D.41}$$

と表される．これは剛体球の S 波散乱断面積 $\sigma = 4\pi R^2$ （D.36）と同じ形をしている．

ところで，**D.2** の式（D.19），（D.20）で，ボルン近似における散乱振幅 $f(\boldsymbol{k}')$ は，散乱ポテンシャル $U(\boldsymbol{r}')$ の広がりが入射波の波長に比べて無視できるほど小さいとき，つまり実効的に $k \to 0$ のとき，

$$f(\boldsymbol{k}') \overset{k\to 0}{\cong} -\frac{2\mu}{4\pi\hbar^2}U_0 \tag{D.19}$$

ただし、

$$U_0 = \int d\boldsymbol{r}' U(\boldsymbol{r}') \tag{D.20}$$

と表されることを示した（この式は剛体球には適応できない．なぜなら剛体球ではボルン近似が成り立たないからである.）．散乱振幅に関する二つの表現，式（D.19）と（D.40），は仮定している条件（$k \to 0$）が同じなので，両者は一致するはずである：

$$f(\boldsymbol{k}') \overset{k\to 0}{\cong} -\frac{2\mu}{4\pi\hbar^2} U_0 = \lim_{k\to 0} f_0 \tag{D.41}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{2\mu}{4\pi\hbar^2} U_0 = -a$$

よって，U_0 と a の関係式

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \tag{D.42}$$

が得られる．ここで，換算質量 μ と粒子の質量 m との関係式 $\mu = m/2$（D.3）を用いた．式（D.42）は，ボルン近似が成り立つ範囲で正しい．斥力ポテンシャル（$U_0 > 0$）では，$a > 0$，引力ポテンシャル（$U_0 < 0$）では，$a < 0$ になる．

D. 5　同種粒子間の散乱

これまでの議論は，すべて異種粒子間の二体衝突を考えてきた．同種粒子間の衝突を記述する波動関数は、粒子の交換に対して、ボース粒子の場合は対称、フェルミ粒子の場合は反対称でなければならない．これまで $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ と定義し，散乱状態の波動関数 $\psi^{(+)}(\boldsymbol{r}) = \psi^{(+)}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ を求めてきたが，粒子を交換すると，$\psi^{(+)}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \psi^{(+)}(-\boldsymbol{r})$ となり，粒子の交換に対して対称でも反対称でもない．正しい波動関数 $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ は，以下のような形をとる：

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \psi^{(+)}(\boldsymbol{r}) \pm \psi^{(+)}(-\boldsymbol{r}) \quad \text{（＋はボース粒子、－はフェルミ粒子）.} \tag{D.43}$$

具体的に，$\psi^{(+)}$ の漸近形（D.14）を代入すると，

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \psi^{(+)}(\boldsymbol{r}) \pm \psi^{(+)}(-\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \pm e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \left[f(\boldsymbol{k}') \pm f(-\boldsymbol{k}') \right] \frac{e^{ikr}}{r} \right] . \tag{D.44}$$

このように、ある特定の$\boldsymbol{k}'$方向への散乱振幅は、粒子１が$\boldsymbol{k}'$方向に（粒子２が$-\boldsymbol{k}'$方向に）散乱される確率振幅と、粒子２が$\boldsymbol{k}'$方向に（粒子１が$-\boldsymbol{k}'$方向に）散乱される確率振幅の和（ボース粒子）または差（フェルミ粒子）になる．特に，S 波散乱の場合，$f(\boldsymbol{k}') = f(-\boldsymbol{k}') = -a$なので，粒子１，粒子２を区別しない衝突断面積$\sigma_{1+2}$は，

$$\sigma_{1+2} = \begin{cases} 4\pi(-a-a)^2 = 16\pi a^2 & (\text{ボース粒子}) \\ 4\pi(-a+a)^2 = 0 & (\text{フェルミ粒子}) \end{cases} \tag{D.45}$$

となる．注目すべきことは、フェルミ粒子間の S 波散乱は起こり得ないことである．また、ボース粒子の場合、一粒子当たりの散乱断面積σは、

$$\sigma = 8\pi a^2 \tag{D.46}$$

となり、異種粒子間の散乱断面積の２倍になる．

今、温度T、密度nのボース粒子の集団を考える．集団の速度分布がマックスウェル・ボルツマン分布をしているとすると、粒子間の相対速度の平均値$\bar{v}$は、

$$\bar{v} = 4\sqrt{k_{\mathrm{B}}T/\pi m} \tag{D.47}$$

であり，単位時間当たりの平均衝突回数は、

$$n\sigma\bar{v} = 32\pi n a^2\sqrt{k_{\mathrm{B}}T/\pi m} \tag{D.48}$$

となる．モンテカルロシミュレーションによると、非平衡状態にある粒子集団が、平衡状態へ緩和（熱化）するレート$1/\tau$に対する、弾性衝突のレートは、2.7 である．つまり、熱化の時定数τの間に 2.7 回の衝突が起こる：

$$n\sigma\bar{v} = 2.7/\tau\,. \tag{D.49}$$

この式を用いて、熱化の時定数から散乱半径（またはその逆）を推定することができる．