

ボース凝縮体の 交差型光双極子カトラップ

2003年1月31日

学習院大学大学院自然科学研究科物理学専攻博士前期課程

荒木幸治

目次

1 章 序論	5
1.1 歴史的背景	5
1.2 ボース凝縮体を使った実験	7
1.3 本研究の目的と位置付け	8
2 章 ボース気体の諸性質	10
2.1 熱原子	10
2.1.1 理想ボース気体の空間密度分布	10
2.1.2 理想ボース気体の運動量分布	11
2.1.3 理想ボース気体の時間発展	11
2.2 ボース凝縮体	12
2.2.1 ボース凝縮の発生条件	12
2.2.2 粒子間相互作用ポテンシャル	13
2.2.3 グロス・ピタエフスキー方程式	14
2.2.4 トーマス・フェルミ近似	14
2.2.5 ボース凝縮体の時間発展	16
3 章 ボース凝縮体の生成手順	18
4 章 中性原子気体のトラップ	19
4.1 磁気トラップ	19
4.2 光双極子カトラップ	22
4.2.1 光双極子力と光散乱レート	22
4.2.2 トラップ用光源（レーザー光）の周波数および強度	24
5 章 ボース凝縮体の光双極子カトラップ	26
5.1 ^{87}Rb のエネルギー準位	26
5.2 交差型光双極子カトラップ	27

5.3	光双極子カトラップの実験手順	29
5.4	光双極子カトラップされたボース凝縮体の観測	31
5.5	光双極子カトラップ中のボース凝縮体の寿命測定	32
5 章	まとめと今後の展望	34
	謝辞	35
	参考文献	36

1 章 序論

1.1 歴史的背景

1924 年、A. Einstein はインドの物理学者 S.N. Bose から一編の論文「プランクの法則と光量子仮説」を受け取った。この論文は、光のスペクトルを統計的な議論（ボース・アインシュタイン統計）で再導出することでプランクの輻射公式を導いたものであった[1]。そして、Einstein は、この Bose の仕事を質量のある通常の粒子に延長し、「**3 次元ではボース粒子は極低温で純粋に量子力学的な相転移をおこし、マクロな数の粒子が系の基底状態に落ち込む**」こと - **ボース・アインシュタイン凝縮（または、ボース凝縮）(BEC : Bose-Einstein condensation)** を予言した[2]。しかしながら、この予言は単に数学上のもので、現実に起こることはないと思われていた。

1938 年、He の超流動の発見とともに、状況は一変する。Einstein の予言を知っていた F. London は、 ^4He がボソンであることに気づき、超流動はボース凝縮によって起こるものとし、Einstein の式が予想する相転移温度 (3.1K) が He の転移温度 (2.2K) の良い近似になっていると指摘した[3]。ボース凝縮の存在が一気に現実味を帯びた瞬間である。

しかし、超流動を示す He は液体であり、その密度は Einstein の議論のもとになった気相の原子よりはるかに高い。つまり、液体では、粒子間の相互作用が大きく、多体の効果が避けられず、状況は複雑化する。特に L.D. Landau がボース凝縮の存在を仮定せずに超流動 He の振る舞いを説明する理論を作り上げることに半ば成功するにおよび、超流動とボース凝縮の関連は不明確になる。俄然、密度の低い、相互作用の小さい系でのボース凝縮の実現が切に望まれるようになった。

転移温度は密度の 3 分の 2 乗に比例する。気体で相転移を目指すには mK やそれ以下まで気体を冷却しなければならない。当然、通常の原子はそのような温度では固体となってしまう。ところが 1959 年、「強磁場中に置かれた（スピン偏極した）水素原子ガスは絶対零度でも固化しない」という論文が発表されると、いくつかのグループが一斉に実験を始めた[4]。

初期の実験は、主に磁場をかけた冷凍機内で偏極水素気体を圧縮することによってボース凝縮を目指すものであった。強磁場をかけた冷凍機内でボース凝縮を目指す、冷凍機での冷却に限界があるため、どうしても高密度状態にしなければならない。しかし、実験が進むにつれ、このような高密度状態の偏極水素原子は 3 体衝突を通して分子を形成してしまうことがわかり、ボース凝縮の実現は困難かと思われた。

そのような中、1986 年に H.F. Hess は、高密度状態を経ずに、つまり 3 体衝突を抑えて偏極水素気体のボース凝縮を実現する手法を提案した[5]。それは、偏極水素気体を磁気ト

ラップにより捕獲して外界との熱的接触を絶ち、運動エネルギーの高い原子を選択的にトラップから脱落させる蒸発冷却法により温度を下げるというものであった。そして、1988年には、D. Kleppner と T.J. Greytak 率いる MIT のグループが磁気トラップ、蒸発冷却を次々と成功させ、あと 3 分の 1 まで温度を下げれば相転移というところまで肉薄し、相転移到達も時間の問題と思われた[6, 7]。しかし現実は厳しく、その「残り 3 分の 1」を達成するのに Kleppner 達はさらに 10 年を要することになった。

これに対し、レーザー冷却した原子を使って壁に挑もうとしたのが E.A. Cornell, C.E. Wieman, W. Ketterle の各氏である。「ゆっくり」冷やしては分子を作り、やがては固化してしまう水素以外の原子でも、「急いで」冷やせば固化する前にボース凝縮に到達できるかもしれない。何しろレーザー冷却はコンマ何秒かで常温の原子を千分の一度やそれ以下に冷却できる優れたものである。原子の冷却、トラップへの半導体レーザーの導入などを精力的に進めていた Wieman は、MIT を卒業したばかりの Cornell を雇い、原子をレーザー冷却した後に磁氣的に閉じこめ、蒸発冷却でさらに冷却する方法を提案する。一方、Cornell の指導教官であった D. E. Pritchard (MIT) は蒸発冷却の改良版を提案するとともに、Ketterle を雇い、やはりレーザー冷却と組み合わせる実験を始めた。いずれも 1990 年のことである。

そして様々な試行錯誤の末、1995 年 6 月に JILA のグループが ^{87}Rb 原子、そして 9 月には MIT のグループが ^{23}Na 原子を用いて、それぞれボース凝縮の発生に成功した[8, 9]。現在では、約 40 のグループがボース凝縮体の生成に成功している。また、E.A. Cornell, C.E. Wieman, W. Ketterle の各氏は、その後の功績も認められ、2001 年には、ノーベル物理学賞を受賞した。

1.2 ボース凝縮体を使った実験

初めて原子気体のボース凝縮体が生成されてから、まだ 10 年と経っていないにもかかわらず、数多くの実験が報告されている。以下に、その中でも代表的な実験の文献を記す。

内容	研究所	原子	論文
集団励起・振動モード	JILA	Rb	Phys. Rev. Lett., 77 , 420 (1996)
	MIT	Na	Phys. Rev. Lett., 77 , 988 (1996)
原子波レーザー (パルス)	MIT	Na	Phys. Rev. Lett., 78 , 582 (1997)
原子波干渉・コヒーレンス	MIT	Na	Science, 275 , 637 (1997)
音波の伝播	MIT	Na	Phys. Rev. Lett., 79 , 553 (1997)
高次コヒーレンス	MIT	Na	Phys. Rev. A56 , 3291 (1997)
ボソニック誘導散乱	MIT	Na	Science, 279 , 1005 (1998)
Feshbach 共鳴	MIT	Na	Nature, 392 , 151 (1998)
水素原子 BEC の生成・分光 (1s-2s)	MIT	H	Phys. Rev. Lett., 81 , 3811 (1998)
スピン (内部) 自由度をもつ BEC	MIT	Na	Nature, 396 , 345 (1998)
巨視的干渉、モード同期原子波レーザー	Yale	Rb	Science, 282 , 1686 (1998)
Bragg 回折	NIST	Na	Phys. Rev. Lett., 82 , 871 (1999)
EIT・遅くなった光の速度	Rowland	Na	Nature, 397 , 594 (1999)
原子波レーザー (準連続発振)	NIST	Na	Science, 283 , 1706 (1999)
四原子波混合	NIST	Na	Nature, 398 , 218 (1999)
原子波レーザー (連続発振)	Munich	Rb	Phys. Rev. Lett., 82 , 3008 (1999)
超放射	MIT	Na	Science, 285 , 571 (1999)
量子渦の観測	JILA	Rb	Phys. Rev. Lett., 83 (13), 2498 (1999)
フォノンの励起	MIT	Na	Phys. Rev. Lett., 83 (11), 2876 (1999)
コヒーレント物質波増幅	MIT	Na	Nature, 402 , 641 (1999)
	Tokyo	Rb	Science, 286 , 2309 (1999)
ダークソリトンの生成	NIST	Na	Science, 287 , 97 (2000)
空間的コヒーレンス	Munich	Rb	Nature, 403 , 166 (2000)
量子渦の多数生成	Paris	Rb	Phys. Rev. Lett., 84 (5), 806 (2000)
Mach-Zehnder 干渉計	Tokyo	Rb	Phys. Rev. A. 61 (4), (2000)
⁸⁵ RbBEC の生成・相互作用の制御	JILA	Rb	Phys. Rev. Lett. 85 , 1795 (2000)
He* BEC の生成	Orsay	He	Science, 292 , 461 (2001)
	ENS		Phys. Rev. Lett., 86 , 3459 (2001)

全光学手法による BEC の生成	GIT	Rb	Phys. Rev. Lett., 87 , 010404 (2001)
マイクロトラップによる BEC の生成	MPI	Rb	Phys. Rev. Lett., 87 , 230401 (2001)
量子渦の格子	MIT	Na	Phys. Rev. Lett. 87 , 210402 (2001)
原子数のスクイズド状態	Yale	Rb	Science, 291 , 2386 (2001)
モット絶縁相転移	MPI	Rb	Nature, 415 , 39 (2002)
ブライトソリトンの生成	Rice	Li	Nature, 417 , 150 (2002)
原子-分子状態のコヒーレンス	JILA	Rb	Nature, 417 , 529 (2002)

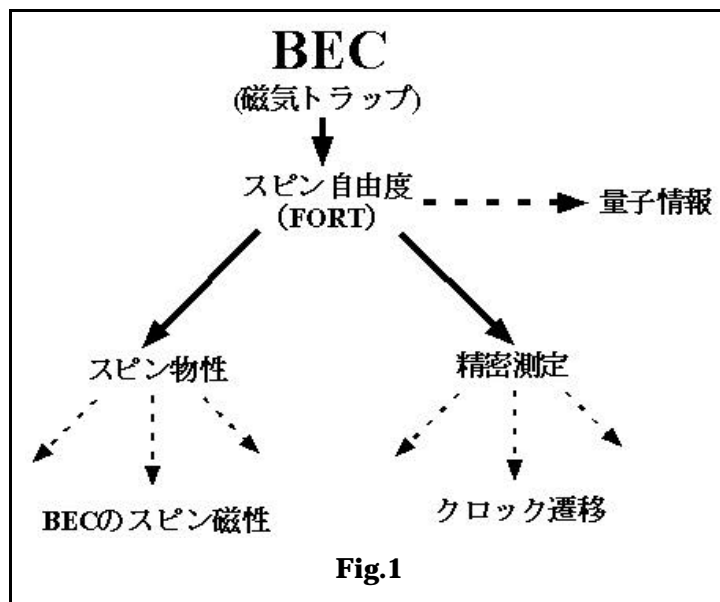
1.3 本研究の目的と位置付け

原子気体の BEC は、特殊な場合を除き、磁気トラップ中で生成される。磁気トラップを使用することは、限られたスピン成分でしか捕獲できないことを意味し、スピン自由度を持たないことになる。これは、磁気トラップが原子の磁気モーメントを利用したもので、スピン成分ごとに受ける力が違うからである。

しかし、光双極子カトラップ (Far Off Resonance optical dipole force Trap: FORT) においては、すべてのスピン成分がほぼ同じ力を受けることであらゆるスピン成分がトラップ可能になる、つまり、スピン自由度を持たせることができる。

スピン自由度を持つ BEC は、MIT のグループで Na の超微細構造準位 $F = 1$ の BEC において興味深い結果を得ている。それは、与える磁場により磁気副準位 m_F が変化したり、ドメイン構造があらわれるというものである (スピンは保存している)。その理論的解釈もされており、理論計算と実験結果がほぼ一致している[10,11]。 $F = 1$ の m_F は $0, \pm 1$ の 3 成分とシンプルであるのに対し、 $F = 2$ には $0, \pm 1, \pm 2$ の 5 成分が存在するため、興味深い対象となる。ところが、 $F = 2$ のスピン自由度を持つ BEC の研究は、未だされていない。その理由として、 $F = 2$ の BEC は、特有のロスがあり、 $F = 1$ に比べ短寿命で、特に Na の $F = 2$ に関しては安定して BEC を生成するのは、困難といわれている。実際に、Na では $F = 2$ の原子集団を磁気トラップ中から BEC を生成した例はない。しかし、Rb の $F = 2$ は特有のロスがあるものの、安定して BEC を生成できる。それゆえに Rb では、 $F = 2$ のスピン自由度を持つ BEC の研究も可能である。また、FORT は、超微細構造準位にもよらずトラップが可能で、異なる超微細構造準位間の相互作用も興味深い対象でもある。

本研究では、スピン自由度を持つ BEC の生成の初期段階として、磁気トラップ中で $^{87}\text{Rb}, |F, m_F\rangle = |2, 2\rangle$ の BEC を生成したのち、BEC を FORT に移行し安定してトラップすることを目的とする。



2章 ボース気体の諸性質

2.1 熱原子

2.1.1 理想ボース気体の空間密度分布 [12]

外部ポテンシャル $V_{trap}(\mathbf{r})$ に閉じ込められている理想（粒子間相互作用のない）ボース気体の分布関数は、ボース・アインシュタイン統計に従い、

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\exp\left[\mathbf{b}\left(\frac{p^2}{2m} + V_{trap}(\mathbf{r}) - \mathbf{m}\right)\right] - 1} \quad \left(\mathbf{b} = \frac{1}{k_B T}\right) \quad (2.1)$$

と記述される（ボース分布関数）。ここで、 \mathbf{m} は化学ポテンシャルである。このとき、位相空間上の密度分布は、

$$n_{BE}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{h^{-3}}{\exp\left[\mathbf{b}\left(\frac{p^2}{2m} + V_{trap}(\mathbf{r}) - \mathbf{m}\right)\right] - 1} \quad (2.2)$$

となる。この式(2.2)を全運動量空間にわたって積分することで空間密度分布

$$n_{BE}(\mathbf{r}) = \int n_{BE}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} = \frac{1}{I_{dB}^3} g_{3/2}(\exp[\mathbf{b}(V_{trap}(\mathbf{r}) - \mathbf{m})]) \quad (2.3)$$

$$I_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2\mathbf{p}m k_B T}} \quad (2.4)$$

が得られる。ここで、 I_{dB} は熱的ド・ブROI波長、 $g_n(z) = \sum_{s=1}^{\infty} z^s / s^n$ はボース関数と呼ばれている。

2.1.2 理想ボース気体の運動量分布 [12]

実際に実験で使われる非等方調和ポテンシャルに閉じ込められている理想ボース気体を考える。この時のポテンシャルを、

$$V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) = V_{\text{trap}}(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\mathbf{w}_x^2 x^2 + \mathbf{w}_y^2 y^2 + \mathbf{w}_z^2 z^2) \quad (2.5)$$

とおく。この場合で、式(2.2)を全位置空間にわたって積分することで運動量分布

$$n_{\text{BE}}(\mathbf{p}) = \int n_{\text{BE}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r} = \frac{1}{\mathbf{I}_{\text{dB}}^3 m^3 \bar{\mathbf{w}}^3} g_{3/2}(\exp[\mathbf{b}(\mathbf{p}^2/2m - \mathbf{m})]) \quad (2.6)$$

が得られる。ここで $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_x \mathbf{w}_y \mathbf{w}_z)^{1/3}$ は幾何平均周波数である。

2.1.3 理想ボース気体の時間発展 [13]

トラップから瞬時に開放された理想ボース気体の空間密度分布の時間発展は、 $\mathbf{w}_x^{-1}, \mathbf{w}_y^{-1}, \mathbf{w}_z^{-1} \ll t$ の場合で近似すれば、空間的に等方的に広がり、

$$n_{\text{BE}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mathbf{I}_{\text{dB}}^3} g_{3/2}\left(\exp\left[\mathbf{b}\left(\mathbf{m} - \frac{m\mathbf{r}^2}{2t^2}\right)\right]\right) \quad (2.7)$$

を得る。

2.2 ボース凝縮体

2.2.1 ボース凝縮の発生条件 [12,13,14]

ボース凝縮とは、ボース分布していたボース粒子がある転移点を越えると最低エネルギー状態に落ち込む現象である。このとき、最低エネルギー状態の粒子数は、それ以外の状態の粒子数に比べマクロな数になっている。

ここで、粒子数 N 個の理想ボース気体が体積 V の箱型ポテンシャルに閉じ込められている状況を考える。この状況で、

$$r_{ps} = n_{BE} I_{dB}^3 \geq V(3/2) = 2.612 \dots \dots \quad (2.8)$$

の条件を満たすときボース粒子はボース凝縮を起こす。ここで、 $n_{BE} = N/V$ は粒子密度、

$z(\mathbf{a}) = \sum_{s=1}^{\infty} 1/s^a$ はツェータ関数であり、 r_{ps} は位相空間密度と呼ばれる。

実際の BEC 実験は、箱型ポテンシャルではなく、非等方 3 次元調和ポテンシャルに閉じ込めて BEC を生成する。このポテンシャル、

$$V_{trap}(x, y, z) = \frac{1}{2} m(\mathbf{w}_x^2 x^2 + \mathbf{w}_y^2 y^2 + \mathbf{w}_z^2 z^2) \quad (2.9)$$

に閉じ込められたときのボース凝縮の発生条件は、

$$r_{ps} = n_{BE} I_{dB}^3 \geq V(3) = 1.202 \dots \dots \quad (2.10)$$

となる。この結果から、箱型ポテンシャルよりも調和ポテンシャルのほうが、ボース凝縮が起こりやすいように思われるが、実は、ピーク密度 n_{BE_0} で考えれば、

$$r_{ps} = n_{BE_0} I_{dB}^3 \geq V(3/2) = 2.612 \dots \dots \quad (2.11)$$

となり、ポテンシャルがどのような形をしていても、ボース凝縮の発生条件はかわらないのである。

式(2.10)を温度 T で書き直すと、

$$T \leq \frac{\hbar \bar{w}}{k_B} \left(\frac{N}{z(3)} \right)^{1/3} = T_C \quad (2.12)$$

となる。ここで、 T_C は**転移温度**と呼ばれ、転移温度 T_C を境に凝縮が始まる。この転移温度 T_C を用いて、ボース凝縮した粒子数 N_0 をあらわすと、

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^3 \right] \quad (2.13)$$

となる¹。

2.2.2 粒子間相互作用ポテンシャル [12]

任意の2粒子間に相互作用ポテンシャル $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ が働く場合を考えてみる。このとき、熱的ド・ブロイ波長が相互作用の到達距離に比べ十分長くなる場合²、つまり温度が十分低い(得にボース凝縮を起こしている)場合には、密度揺らぎは相互作用の到達範囲内でほとんど変化しない。この条件が成り立つときには、相互作用ポテンシャル $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ をデルタ関数で、

$$U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = U_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad U_0 = \int U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.14)$$

と近似できる。このときの粒子間衝突は**S波散乱**が支配的であり、 U_0 と**散乱長** a との関係式、

$$U_0 = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} \quad (2.15)$$

が成り立つ。

¹ 現実の気体には粒子間相互作用があるので理想気体ではなく、転移温度 T_C は数%低くなる。

² 相互作用の到達距離は数 nm のオーダーであるのに対して、ボース凝縮体のド・ブロイ波長は数十 μm のオーダーである。

2.2.3 グロス・ピタエフスキー方程式 [12]

外部ポテンシャル $V_{trap}(\mathbf{r})$ に閉じ込められたボース凝縮体の波動関数は、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{trap}(\mathbf{r}) + U_0 |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.16)$$

と記述される。この方程式は、非線形シュレディンガー方程式、または**グロス・ピタエフスキー方程式**と呼ばれる。

式(2.16)の定常解として、

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\mathbf{m}t/\hbar) \Phi(\mathbf{r}) \quad (2.17)$$

を考える。式(2.17)を式(2.16)に代入すると、

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{trap}(\mathbf{r}) + U_0 |\Phi(\mathbf{r})|^2 \right] \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \Phi(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

の時間依存のないグロス・ピタエフスキー方程式を得る。全粒子がボース凝縮を起こしているのならば、その全粒子数は、

$$N_0 = \int |\Phi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \quad (2.19)$$

で計算できる。

2.2.4 トーマス・フェルミ近似 [12,13]

散乱長 a ($U_0 > 0$) が正で、かつ粒子数 N_0 が十分大きいとき³、粒子間相互作用エネルギー項 $U_0 |\Phi(\mathbf{r})|^2$ が大きくなり、運動エネルギー項 $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$ が無視できるようになる(**トーマス・フェルミ近似**)。そのとき、グロス・ピタエフスキー方程式は、

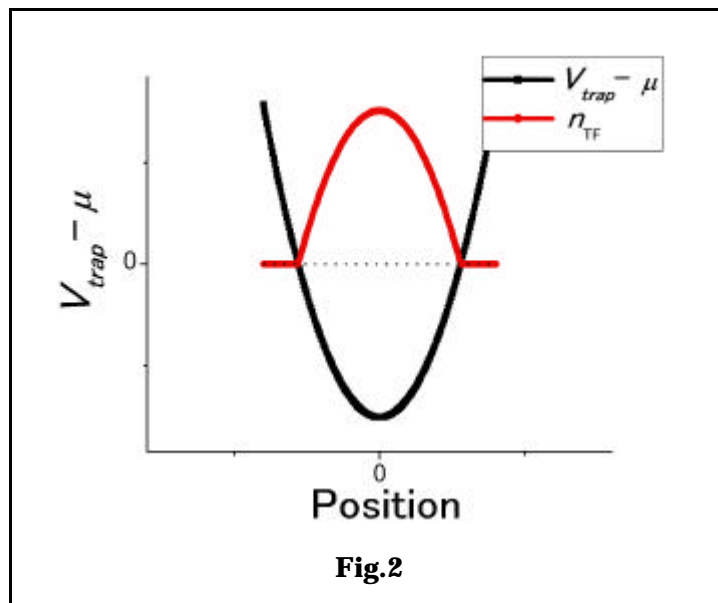
³ トラップの形状と原子種にもよるが、 $N_0 \leq 10^5$ [atoms] でトーマス・フェルミ近似から徐々に外れるため、 $N_0 \leq 10^5$ [atoms] では補正が必要とされる[15]。

$$\left[V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + U_0 |\Phi(\mathbf{r})|^2 \right] \Phi(\mathbf{r}) = m \Phi(\mathbf{r}) \quad (2.20)$$

とトーマス・フェルミ近似で扱うことが可能になる。この場合において、ボース凝縮体の密度分布 $n_{\text{TF}}(\mathbf{r})$ は、

$$n_{\text{TF}}(\mathbf{r}) = |\Phi(\mathbf{r})|^2 = \begin{cases} \frac{m - V_{\text{trap}}(\mathbf{r})}{U_0} & (m - V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) \geq 0) \\ 0 & (m - V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) < 0) \end{cases} \quad (2.21)$$

となる。これは、ポテンシャル $V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) = m$ で折り返した形である (Fig.2)。



ポテンシャル $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$ に実際使われる非等方調和ポテンシャルを入れるとボース凝縮体の密度分布、

$$n_{\text{TF}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m}}{U_0} \left[1 - \left(\frac{x^2}{d_x^2} + \frac{y^2}{d_y^2} + \frac{z^2}{d_z^2} \right) \right] \quad (2.22)$$

$$d_q = \sqrt{\frac{2\mathbf{m}}{m\bar{\omega}_q^2}} \quad (q = x, y, z) \quad (2.23)$$

が得られる。ここで、 d_q は、トラップ中のボース凝縮体の半幅である。また、規格化条件

の式(2.19)と式(2.15)から、ボース凝縮体の化学ポテンシャル \mathbf{m} とピーク密度 n_{TF_0} は、

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \hbar \bar{\omega} \left(15 N_0 a \sqrt{\frac{m \bar{\omega}}{\hbar}} \right)^{2/5} = \frac{1}{2} (15 N_0 a \hbar^2 \bar{\omega}^3 m^{1/2})^{2/5} \quad (2.24)$$

$$n_{\text{TF}_0} = n_{\text{TF}}(0) = \frac{\mathbf{m}}{U_0} = \frac{1}{16} \left(\frac{15 N_0 m^3 \bar{\omega}^3}{\hbar^3 a^{3/2}} \right)^{2/5} \quad (2.25)$$

となる。ちなみに、式(2.22)の形式は、

$$\begin{aligned} n_{\text{TF}}(\mathbf{r}) &= \frac{15}{8\mathbf{p}} \frac{N_0}{d_x d_y d_z} \left[1 - \left(\frac{x^2}{d_x^2} + \frac{y^2}{d_y^2} + \frac{z^2}{d_z^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{U_0 \bar{\omega}^3} \frac{1}{d_x d_y d_z} \left(\frac{2^3 \mathbf{m}^5}{m^3} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{x^2}{d_x^2} + \frac{y^2}{d_y^2} + \frac{z^2}{d_z^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

と表すこともできる。

2.2.5 ボース凝縮体の時間発展 [12,13]

トラップから瞬間的に開放されたボース凝縮体の密度分布の時間発展は、トーマス・フェルミ近似が有効な範囲では、

$$n_{\text{TF}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{U_0 \bar{\omega}^3} \frac{1}{d_x(t) d_y(t) d_z(t)} \left(\frac{2^3 \mathbf{m}^5}{m^3} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{x^2}{d_x(t)^2} + \frac{y^2}{d_y(t)^2} + \frac{z^2}{d_z(t)^2} \right) \right] \quad (2.27)$$

$$d_q(t) = I_q(t) \sqrt{\frac{2m}{m\mathbf{w}_q^2}} \quad (2.28)$$

と各方向の幅のみが変化する。非等方性が大きい軸対称ポテンシャル ($w_r = w_x = w_y \gg w_z$) の場合、各方向の膨張率 $I_r(t) = I_x(t) = I_y(t)$ 、 $I_z(t)$ は、

$$\frac{d^2 I_r(t)}{dt^2} = \frac{1}{I_r^3 I_z}, \quad \frac{d^2 I_z(t)}{dt^2} = \frac{\mathbf{e}_{\text{TF}}^2}{I_r^2 I_z^2} \quad (2.29)$$

の連立微分方程式に従う。ここでは、 $t = w_r t$ とおき、 $\mathbf{e} = w_z/w_r \ll 1$ のアスペクト比としている。ここで、 \mathbf{e} の 2 次近似までとると、

$$\begin{aligned} I_r(t) &= \sqrt{1+t^2} \\ I_z(t) &= 1 + \mathbf{e}^2 \left[t \arctan(t) - \ln \sqrt{1+t^2} \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

となる。よって、アスペクト比の時間発展は、

$$\mathbf{e}_{\text{TF}}(t) = \frac{d_r}{d_z} = \mathbf{e}_{\text{TF}} \frac{I_r(t)}{I_z(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{2 w_r}{p w_z} \quad (2.31)$$

となる。

3章 ボース凝縮体の生成手順

以下に我々が用いた ^{87}Rb 原子のボース凝縮体 (BEC) の生成の流れを記す⁴ (Fig.3)

磁気光学トラップ (MOT : Magneto-Optical Trap) [16] : 原子を超高真空内で冷却 ($\sim 1 \text{ mK}$) かつ捕獲する。

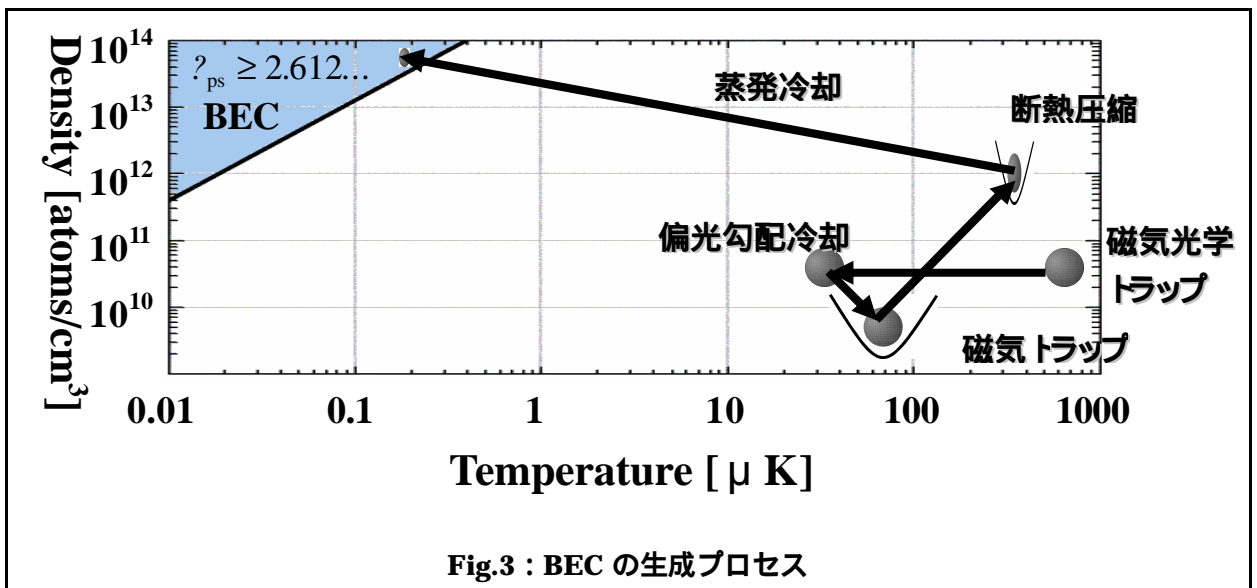
偏光勾配冷却 (PGC : Polarization Gradient Cooling) [17] : さらに冷却 (\sim 数十 μK) する。

スピン偏極 & 磁気トラップ (MT : Magnetic Trap) [18] : スピン偏極し、磁氣的に再捕獲する。

断熱圧縮 : 断熱的にポテンシャルを変え圧縮する。

蒸発冷却[19] : エネルギーの高い原子を選択的にトラップから逃がし、再熱化させることで冷却し、BEC が生成されるまで冷却 ($\sim 1 \mu\text{K}$) する。

Time-of-flight (TOF) & イメージング[13,20] : 原子集団をトラップから開放し、時間発展させ、原子集団を観測する。



の光吸収・放出を使った冷却での位相空間密度は 10^{-6} とボース凝縮が起こる条件の 2.612... (式(2.11)) からは、非常に離れている。この差を埋める重要な技術が の蒸発冷却であり、これにより、ボース凝縮に到達する。また、 の磁気トラップと の断熱圧縮は、蒸発冷却を行なう上で必要不可欠な手段である。

⁴ BEC の生成方法には、磁気トラップを使用しない光学のみを使った生成方法もある[21]。

4章 中性原子気体のトラップ

中性原子気体の捕獲には、磁気トラップと光双極子カトラップが主として、挙げられる。この章では、磁気トラップと光双極子カトラップについて説明する。

4.1 磁気トラップ (MT : Magnetic Trap)

磁気トラップは、原子の磁気モーメントを利用したトラップである[18]。原子が磁気モーメント μ を持つ場合、磁場 $B_{MT}(\mathbf{r})$ 中に置かれた原子にはポテンシャル

$$U_{MT}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_{MT}(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

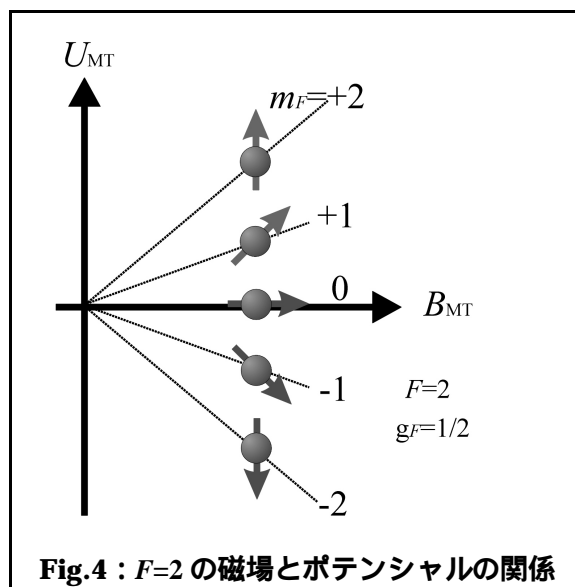
が生じる。特に、低磁場においては、

$$U_{MT}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_{MT}(\mathbf{r}) \sim g_F \mathbf{m}_B m_F |\mathbf{B}_{MT}(\mathbf{r})| \quad (4.2)$$

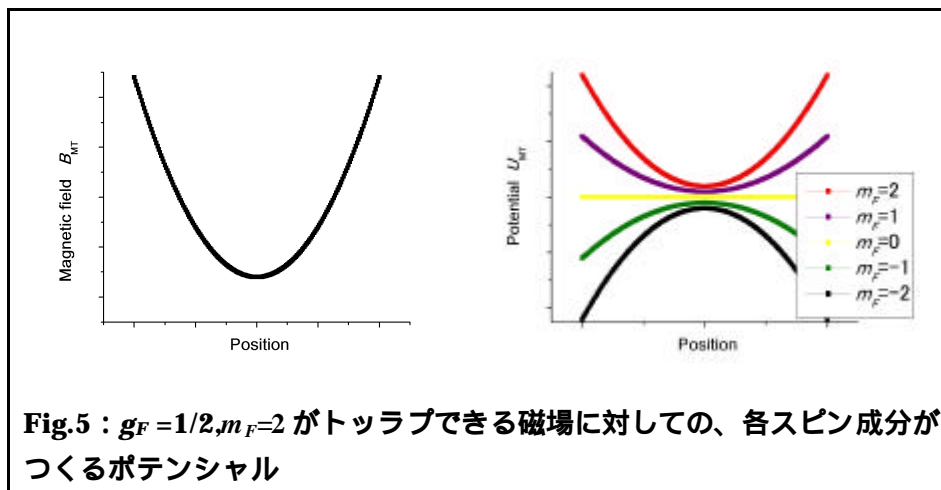
となる (Fig.4)。ここで、 g_F はランダウの g_J 因子を用いて、

$$g_F = g_J \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)} \quad (4.3)$$

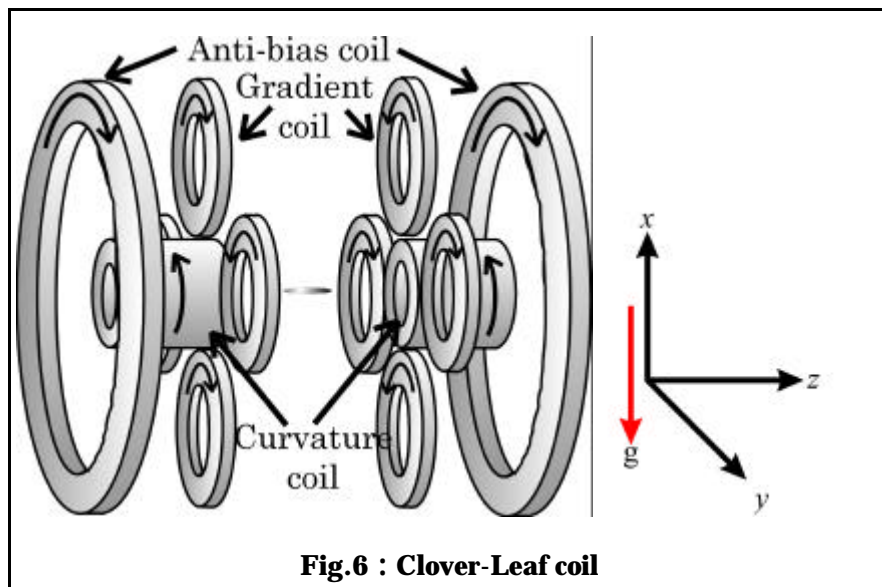
とあわせ、 m_F は磁気副準位である。



式(4.2)からもわかるようにポテンシャルは、スピン成分（磁気副準位 m_F ）に依存し、限られたスピン成分 m_F しかトラップできない（Fig.5）。つまり、磁気トラップにはスピン自由度がないということになる。



本実験では $F = 2, m_F = 2$ の原子をトラップしたいので、Fig.5 のように、磁場に極小点を持たせるような、Ioffe-Pritchard 型である Clover-Leaf coil を使用した（Fig.6）。



Clover-Leaf coil は、動径方向 r の閉じ込めは Gradient coil で、軸方向 z の閉じ込めは Curvature Coil で独立に調整できるが特徴である。式で記述すると、

$$\mathbf{B}_{\text{MT}}(x, y, z) = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + B_r \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{B_z}{2} \begin{pmatrix} -xz \\ -yz \\ z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

となる。式(3.8)を近似的に磁場の大きさに変換すると、

$$|\mathbf{B}_{\text{MT}}| \approx B_0 + \frac{1}{2}(B_r'' r^2 + B_z'' z^2) \quad (4.5)$$

となる。ここで、 B_r'' は、

$$B_r'' = \frac{B_r'^2}{B_0} - \frac{B_z''}{2} \quad (4.6)$$

と定義した。こうして、最終的に Clover-Leaf coil で得られるポテンシャル $U_{\text{MT}}(\mathbf{r}, z)$ は、

$$U_{\text{MT}}(\mathbf{r}, z) = g_F \mathbf{m}_B m_F \left[B_0 + \frac{1}{2}(B_r'' r^2 + B_z'' z^2) \right] \quad (4.7)$$

となる。この式は調和ポテンシャルそのものなので、トラップ周波数 ω_r 、 ω_z は、

$$\omega_r = \sqrt{\frac{g_F \mathbf{m}_B m_F B_r''}{m}} \quad (4.8)$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{g_F \mathbf{m}_B m_F B_z''}{m}} \quad (4.9)$$

で得られる。

4.2 光双極子カトラップ (FORT : Far Off Resonance optical dipole force Trap)

光双極子カトラップ (FORT) は、光 (振動電場) と光によって誘起される原子の双極子モーメント (分極) を利用したトラップである。ここでは、単純な 2 準位原子について説明する。

4.2.1 光双極子力と光散乱レート [22]

光によって原子が双極子モーメント \mathbf{p}_{dip} を誘起している場合、光 $\mathbf{E}_{\text{FORT}}(\mathbf{r})$ 中に置かれた原子にはポテンシャル

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{p}_{\text{dip}} \cdot \mathbf{E}_{\text{FORT}}(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\mathbf{a}) I(\mathbf{r}) \quad (4.10)$$

が生じる。ここで、 \mathbf{a} は分極率で光の周波数 ω に依存し、 $I(\mathbf{r})$ は光の強度である。また、原子が光を吸収する確率は、

$$P_{\text{abs}}(\mathbf{r}) = \langle \dot{\mathbf{p}}_{\text{dip}} \cdot \mathbf{E}_{\text{FORT}}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\omega}{\epsilon_0 c} \text{Im}(\mathbf{a}) I(\mathbf{r}) \quad (4.11)$$

となり、その吸収レート (光散乱レート) Γ_{scat} は、

$$\Gamma_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \frac{P_{\text{abs}}(\mathbf{r})}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \text{Im}(\mathbf{a}) I(\mathbf{r}) \quad (4.12)$$

となる。

原子の分極率の算出は、

$$\mathbf{a} = \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_w} \quad (4.13)$$

$$\Gamma_w = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 m_e c^3} \quad (4.14)$$

の解を持つ電子の減衰振動モデル

$$\ddot{x} + \Gamma_w \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{eE(t)}{m_e} \quad (4.15)$$

から導出できる。まず、式(4.14)から、

$$\frac{e}{m_e} = \frac{6pe_0c^3\Gamma_w}{\omega^2} \quad (4.16)$$

と置き換え、共鳴周波数 ω_0 付近の減衰レート

$$\Gamma = \Gamma_{\omega_0} = (\omega_0/\omega)^2 \Gamma_w$$

を式(4.13)に代入すれば、原子の分極率

$$\mathbf{a} = 6pe_0c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma_w} \quad (4.17)$$

が求まる。

分極率 \mathbf{a} (式(4.17)) を式(4.10)と式(4.12)に代入すると、

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{3pc^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right) I(\mathbf{r}) \quad (4.18)$$

$$\Gamma_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \frac{3pc^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right)^2 I(\mathbf{r}) \quad (4.19)$$

となる。ここで、光の離調を $d = \omega - \omega_0$ とあらわしたとき、 $|d| \ll \omega_0$ を満たすような場合

には、最終的にそのポテンシャルと光散乱レートは、

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{3pc^2}{2w_0^3} \frac{\Gamma}{d} I(\mathbf{r}) \quad (4.20)$$

$$\Gamma_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \frac{3pc^2}{2\hbar w_0^3} \left(\frac{\Gamma}{d}\right)^2 I(\mathbf{r}) \quad (4.21)$$

となる。

式(4.20)からもわかるようにポテンシャルは、スピン成分に依存せず、超微細構造準位 F や磁気副準位 m_F によらずトラップが可能である。つまり、光双極子カトラップによりスピン自由度を持つことになる。

4.2.2 トラップ用光源（レーザー光）の周波数および強度 [22]

光双極子力でトラップするにはレーザー光の強度に勾配を持たせなければならない。式(4.20)より、レーザー光の離調を正としたときでは、強度に極小点を、負にしたときでは、強度に極大点を持たせることで、トラップが可能になる。特に、負離調の場合には、レーザー光をレンズで絞ってあげれば強度の極大点ができるので単純にトラップできる。

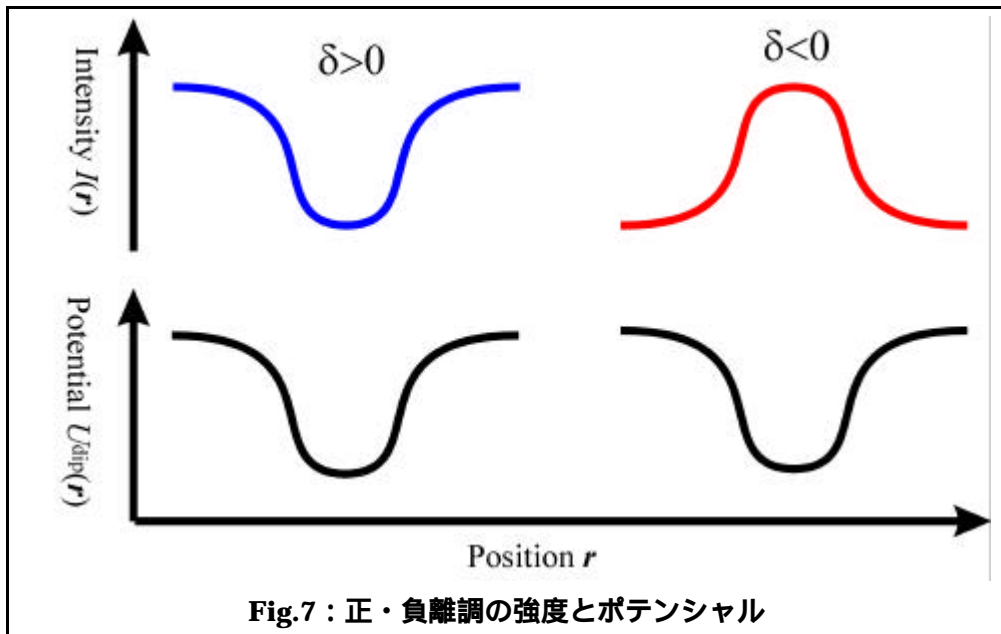


Fig.7 : 正・負離調の強度とポテンシャル

また、式(4.20)からポテンシャルを大きくするには光強度が大きく離調が小さい光（レーザー）を用いればよいことがわかる。しかしながら、現実には光強度を大きく離調を小さくすると原子がトラップ光を吸収して加熱される効果が大きくなってしまふ。そのために

光の吸収（光散乱レート）も考慮にいれた最適な解を探す必要がある。

ポテンシャルは式(4.20)より、離調を大きくすると依存して $1/d$ で下がるが、光散乱レートは式(4.21)より、 $1/d^2$ で下がっていく。つまり、光散乱レートを低いままでポテンシャルを大きくするには離調を大きく、そして光強度を大きくすればよいことがわかる。

5章 ボース凝縮体の光双極子カトラップ

5.1 ^{87}Rb のエネルギー準位

^{87}Rb の準位は、単純な 2 準位ではなく、多数の準位が存在する。しかし、FORT に使用するレーザー光の離調を十分、取れば、 $5S_{1/2}$ 、 $5P_{1/2}$ 、 $5P_{3/2}$ の 3 準位で考えることができる (Fig.8)

このときつくるポテンシャルは、遷移確率を考慮して計算すると、

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{pc^2\Gamma}{2w_0^3} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{2}{d_2} \right) I(\mathbf{r}) \quad (5.1)$$

となる。ここで d_1 、 d_2 は、 $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{1/2}$ 、 $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ の遷移波長 $\lambda = 795$ 、 780 [nm] からの FORT レーザーの離調である。

本実験での FORT レーザーは、波長 $\lambda = 850$ [nm] の負に離調したものをを使用した。

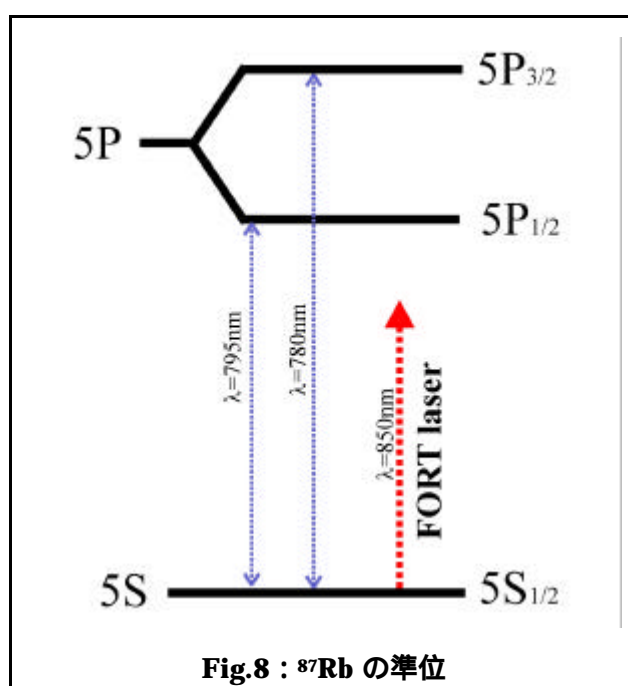


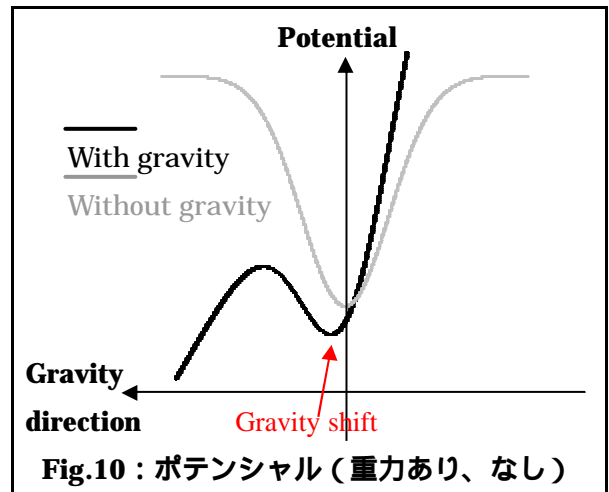
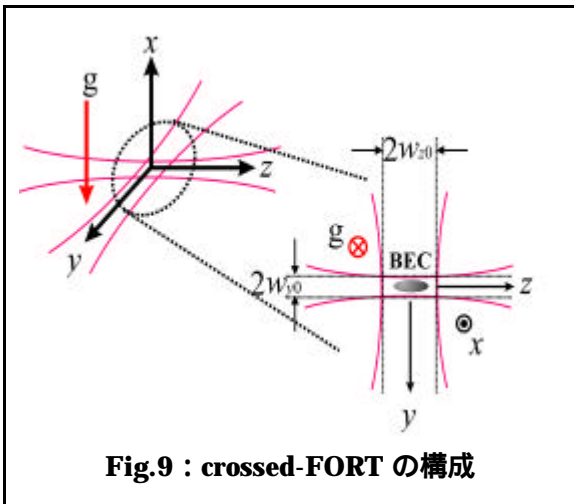
Fig.8 : ^{87}Rb の準位

5.2 交差型光双極子カトラップ (crossed-FORT)

負離調の光双極子カトラップは、4章で述べたように、レンズでレーザーを絞ればよい。本実験では、レーザー光を2本交差させた交差型光双極子カトラップ (crossed-FORT) を使用した。ガウスビーム光学とレンズ光学から、レーザー光の空間的な強度分布 $I(r)$ を代入した crossed-FORT のポテンシャルは、2本のレーザー光がつくるポテンシャルの和で、

$$\begin{aligned}
 U_{\text{FORT}}(x, y, z) &= \sum U_i + U_g \\
 &= \frac{U_{z\text{-axis}0}}{1 + (z/z_r)^2} \exp\left[\frac{-2(x^2 + y^2)}{w_{y0}^2(1 + (z/z_r)^2)}\right] + \frac{U_{y\text{-axis}0}}{1 + (y/y_r)^2} \exp\left[\frac{-2(x^2 + z^2)}{w_{z0}^2(1 + (y/y_r)^2)}\right] + mgx \\
 \left(\begin{array}{l} U_{z\text{-axis}0} = -\frac{pc^2\Gamma}{2w_{z\text{-axis}0}^3} \left(\frac{1}{d_{z\text{-axis}1}} - \frac{2}{d_{z\text{-axis}2}} \right) \frac{2P_{z\text{-axis}}}{pw_{y0}^2} \\ U_{y\text{-axis}0} = -\frac{pc^2\Gamma}{2w_{y\text{-axis}0}^3} \left(\frac{1}{d_{y\text{-axis}2}} - \frac{2}{d_{y\text{-axis}2}} \right) \frac{2P_{y\text{-axis}}}{pw_{z0}^2} \end{array} \right)
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

となる。ここで、 w_{y0} 、 w_{z0} は FORT ビームの $1/e^2$ 焦点半径、 z_r 、 y_r は FORT ビームのレイリー長、 $P_{z\text{-axis}}$ 、 $P_{y\text{-axis}}$ は FORT ビームの全パワー、 U_g は重力ポテンシャルである (Fig.9)。重力ポテンシャルを加えた理由としては、原子のロスを抑えるためにできるだけポテンシャルを浅く、なおかつ弱い力で捕獲するのが好ましく、その場合、重力ポテンシャルが大きく影響するからである (Fig.10)。



最終的に、重力の効果を考慮した実効的なポテンシャルの深さ U_0 は、

$$U_0 = U_{\text{FORT}}(x_1, 0, 0) - U_{\text{FORT}}(x_0, 0, 0)$$

$$\frac{\partial U_{\text{FORT}}(x, 0, 0)}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = x_0, x_1 \quad (|x_0| < |x_1|)$$
(5.3)

で計算できる (Fig.11)、

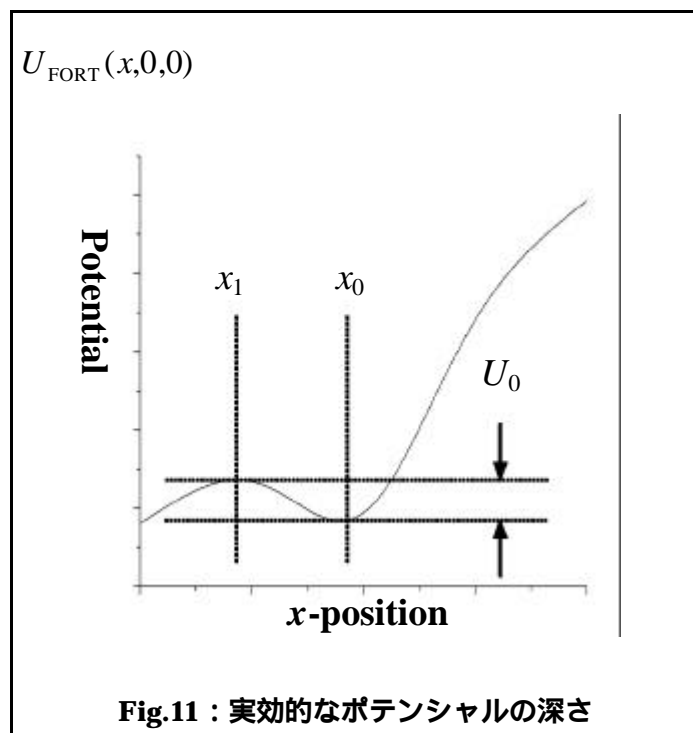
ポテンシャルが浅い場合には、非調和ポテンシャルをつくるので、トラップ周波数は、位置に依存し、

$$\mathbf{w}_q(x, y, z) = \sqrt{\frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial q^2}} / m, \quad (q : x, y, z)$$
(5.4)

となってしまう。それゆえに、トラップポテンシャルの底 $(x_0, 0, 0)$ でのトラップ周波数

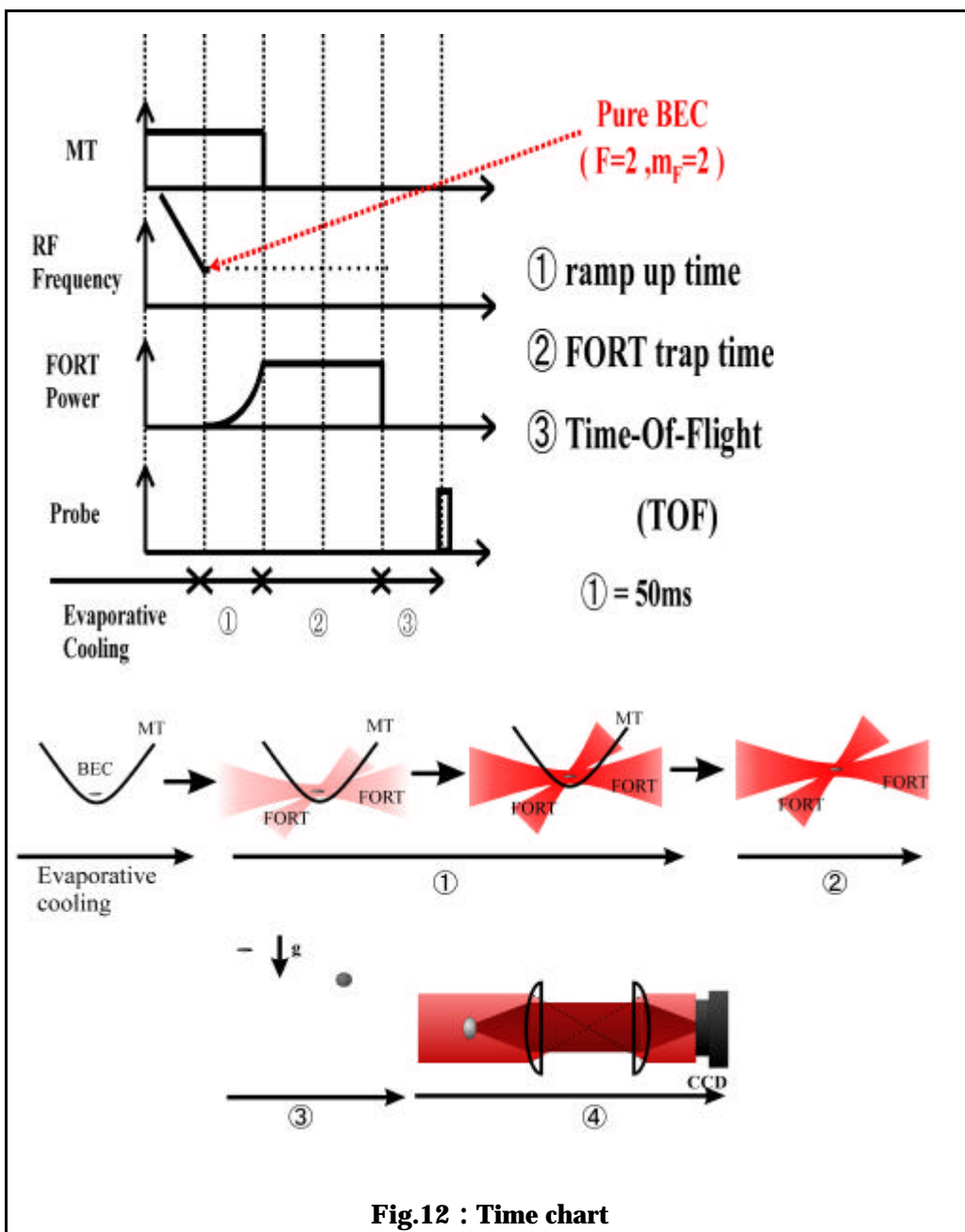
$$\mathbf{w}_q = \mathbf{w}_q(x_0, 0, 0), \quad (q : x, y, z)$$
(5.5)

をトラップ周波数と定義する。



5.3 光双極子カトラップの実験手順

まず、はじめに、磁気トラップ (MT) 中で BEC を生成する。BEC を生成した時点で、蒸発冷却で使用した RF を切る。その後、同時に 2 本の FORT レーザーを 50ms かけて立ち上げ、立ち上がったと同時に磁気トラップを切る (Fig.12)。光 (FORT 光) のみで、ある時間トラップする (Fig.12)。その後、FORT 光を切り、自由落下により時間発展させる (Time-Of-Flight : TOF) (Fig.12)。最後に、プローブ光で、BEC の影を CCD で観測する (Fig.12)。



また、本実験で行なった、Crossed-FORT のパラメータと磁気トラップ (MT) のパラメータを Table 1 に記す。

Parameter	Crossed-FORT	MT
$U_0[\mathbf{mK}]$	~ 1.0	~ 1.2
$w_x[2\mathbf{p} \times \text{Hz}]$	~ 230	~ 155
$w_y[2\mathbf{p} \times \text{Hz}]$	~ 244	~ 155
$w_z[2\mathbf{p} \times \text{Hz}]$	~ 21	~ 15
$\bar{w} = (w_x w_y w_z)^{1/3}$ [2p × Hz]	~ 106	~ 71
$1/e = \frac{(w_x w_y)^{1/2}}{w_z}$	~ 11	~ 10

Table 1 : crossed-FORT と MT のパラメータ

5.4 光双極子カトラップされたボース凝縮体の観測

磁気トラップ中で生成された BEC の原子数はおよそ 10^6 [atoms] で、crossed-FORT に移行できた原子数はおよそ 5×10^5 [atoms] で、移行効率はおおよそ 50% となった。

Fig.13 は、500ms 光のみ (crossed-FORT) で原子を保持し、トラップから開放された BEC の TOF 画像である。Fig.14 はトラップ時間別に撮影した BEC の TOF 画像である。

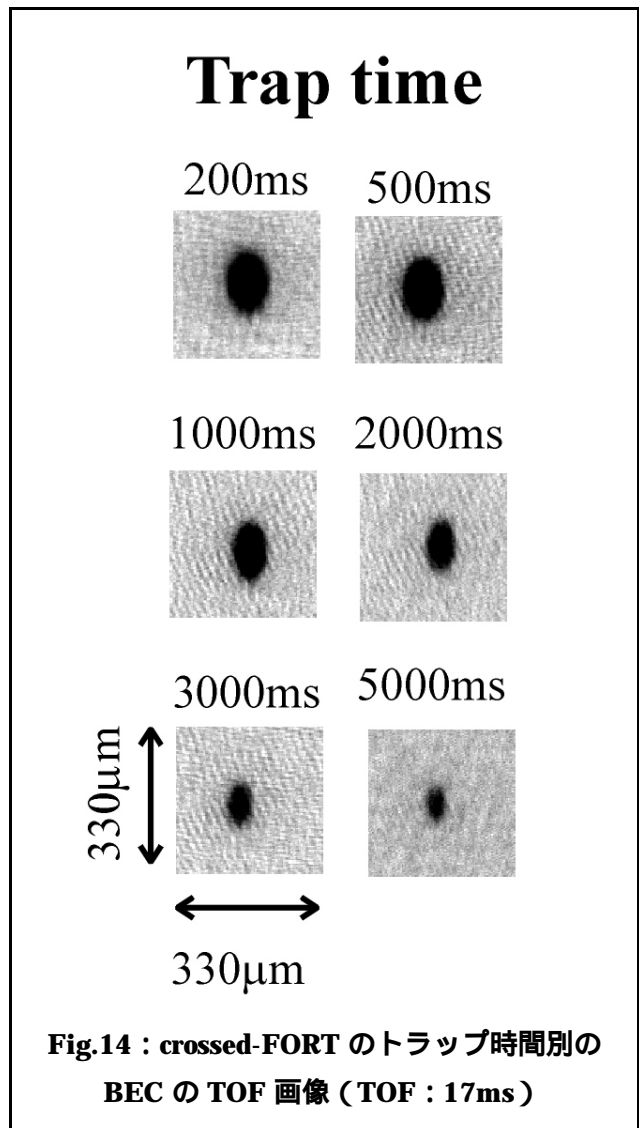
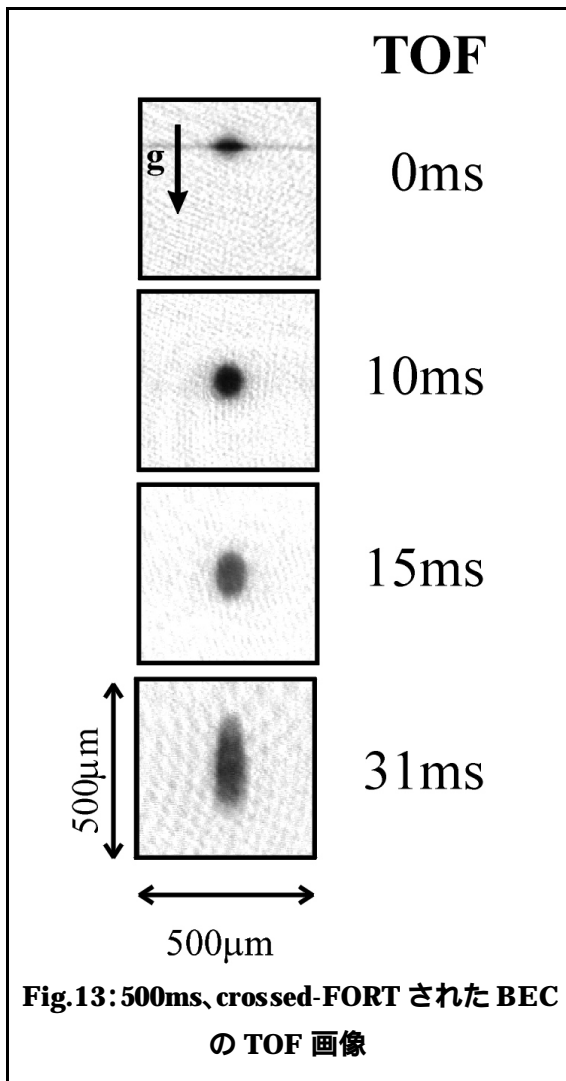


Fig.14 から、BEC を crossed-FORT で 5000ms 以上、安定してトラップすることができることを確認した。

5.5 光双極子カトラップ中のボース凝縮体の寿命測定

crossed-FORT 中の BEC の寿命を評価してみる。結果は Fig.16 に示す。黒点は磁気トラップ中、赤点は crossed-FORT 中の BEC の原子数の推移である。

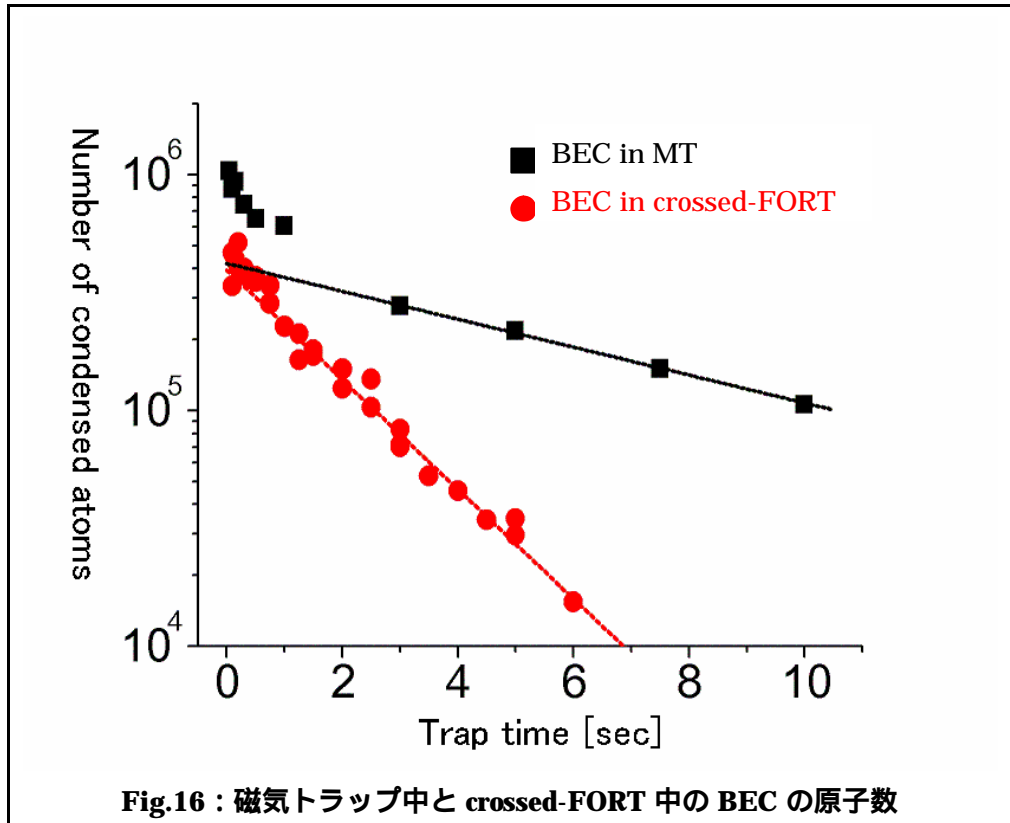


Fig.16 : 磁気トラップ中と crossed-FORT 中の BEC の原子数

一般に、トラップ中の ^{87}Rb の原子数の時間変化は、以下の微分方程式で記述できる。

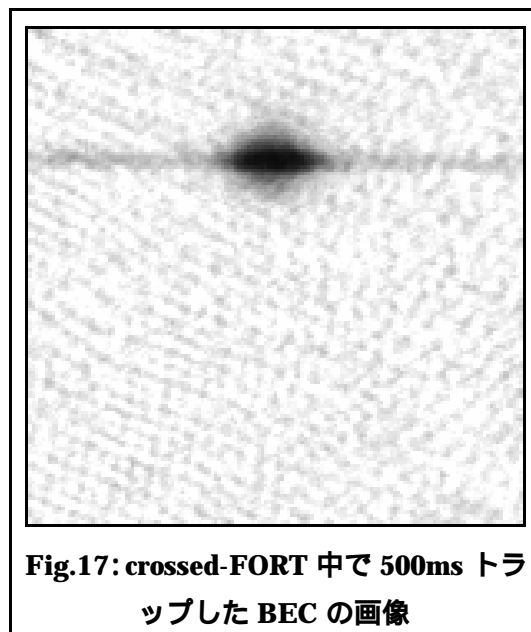
$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = -K_1 - K_3 \langle n^2 \rangle \quad (5.6)$$

ここで、 K_1 は原子密度 n に依存しないロスレート、 K_3 は原子の 3 体衝突によるロスレートである。このとき、トラップ時間がある程度たち、 $K_1 \gg K_3 \langle n^2 \rangle$ を満たすようになると、原子数の時間変化は、

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = -K_1 \quad (5.7)$$

となる。この K_1 は、基本的にバックグラウンドによるロスだけに決まり、トラップによらず同じであるべきである。しかし、Fig.16 からの結果では、磁気トラップでは $t_{\text{MT}} = 1/K_1 \sim 7.3$ [sec]、crossed-FORT では $t_{\text{FORT}} \sim 1.9$ [sec] と異なる結果を得た。およそ、crossed-FORT 中の方が 3.8 倍早くロスしている。この原因を考えてみる。まずは、光の吸収による加熱が考えられるが、光散乱レートを式 (4.21) から計算すると、 $t_{\text{scat}} = 1/\Gamma_{\text{scat}} \sim 560$ [sec] となり、トラップ時間が数秒なのでほとんど影響がないと考えられる。次に考えられるのは、FORT ビームの強度揺らぎや位置揺らぎによる加熱が考えられる。事実として、2 本の FORT ビームを少しずらしただけで、ロスの速さが変わる。つまり、これが一番の原因ではないかと思われる。他にも、crossed-FORT 中の BEC (Fig.17) を観測したところ、左右に羽根のように、密度、温度ともに非常に低い熱原子が存在していた。この熱原子の効果がロスを早くしている原因のひとつとも考えられる。

以上をまとめると、磁気トラップよりはロスが早いものの、比較的長時間 crossed-FORT により光のみで BEC をトラップできた。



5章 まとめと今後の展望

本実験において、磁気トラップ中で BEC は生成されるが、磁気トラップ中では、特定の状態にいる原子しかトラップできない。そこで本研究の主旨である光双極子力トラップに移行した。

そこで、比較的パラメータに自由度がある Crossed-FORT で磁気トラップに近いトラップにすることで、磁気トラップから Crossed-FORT に移行した。そのときの BEC の原子数は $\sim 5 \times 10^5$ [atoms] となり、移行効率は $\sim 50\%$ となった。

また、Crossed-FORT 中の BEC の寿命も測定した。3 体衝突の効かないと思われるところ、つまりバックグラウンドによりロスが支配的なところのロスを比較してみたところ、およそ 3.8 倍も Crossed-FORT 中の方がロスが早かった。これは、単にミスアライメントや FORT 光の強度揺らぎ、光学系の安定度の問題が大きいのではないかと思われる。しかしながら、寿命の長さを考えると、Crossed-FORT 中で実験を行なうには、そんなに大きな問題ではなさそうである。以下にまとめた表を記す。

	磁気トラップ中の BEC	Crossed-FORT 中の BEC
原子数 N_0	$\sim 10^6$ [atoms]	$\sim 5 \times 10^5$ [atoms]
寿命 t (3 体衝突ロス効かない)	~ 7.3 [sec]	~ 1.9 [sec]

BEC を安定して光双極子トラップできたので、今後の展望は $F = 2$ のスピン自由度の研究が期待されるが、 $F = 2$ は、ストレッチド状態以外の状態では非常にロスが大きいことがわかっているため難しいかもしれない。しかし、そのロスも多くは研究されていないため研究価値はある。また、異なる超微細構造準位間の相互作用による効果などもあまり研究されていないため非常に興味深い。他にも光双極子力トラップ中なのでスピンをまわすことで、安易にスピン自由度を持つ量子渦が生成できるかもしれないことなども今後の展望でもある。

謝辞

本実験および論文作成にあたり、本大学理学部物理学科平野研究室の平野琢也助教授には懇切丁寧なご教授ならびに、実験のご指導を賜り厚く御礼申し上げます。

桑本剛助手には、共同で実験を行ったり、実験のノウハウやアイデアを頂いたり、真に有難うございました。また、実験で詰まったときには、非常に助けられました。

一年間という短い間でしたが、吉川豊さん（当時同研究室の大学院生で現在は東京大学の助手）には、当時、様々なアドバイスを頂き、心から感謝致します。私が BEC の実験について細かく把握できているのも、現在、平野研究室の BEC 装置が安定して動いていることも、吉川豊さんがいなければ、まずなかったといっても過言ではありません。

NTT 物性科学基礎研究所の山下眞様、東京大学の鳥居寿夫助教授の御二方にも大変参考になるアドバイスを多数頂き、心から感謝致します。

また、同期である山中裕人さんと小谷香央里さん、同研究室の皆様にも大変お世話になり、心から感謝致します。

最後に、このような恵まれた環境で、研究ができたことを非常に感謝いたします。

参考文献

- [1] S.N. Bose, Z. Phys. **26**, 178 (1924).
- [2] A. Einstein, Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. **1925**, 3 (1925) [邦訳：『アインシュタイン選集 1』湯川秀樹監修，中村，谷川，井上訳（共立出版 1971 年）p. 136].
- [3] F. London, Nature (London) **141**, 643 (1938).
- [4] C.E. Hecht, Physica **25**, 1159 (1959).
- [5] H.F. Hess, Phys. Rev. **B 34**, 3476 (1986).
- [6] H.F. Hess, G.P. Kochanski, J.M. Doyle, N. Masuhara, D. Kleppner, and T.J. Greytak, Phys. Rev. Lett. **59**, 935 (1987).
- [7] N. Masuhara, J.M. Doyle, J.C. Sandberg, D. Kleppner, T.J. Greytak, G.P. Kochanski, and H.F. Hess, Phys. Rev. Lett. **61**, 935 (1988)
- [8] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, Science **269**, 198 (1995).
- [9] K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [10] J. Stenger, S. Inouye, D.M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A.P. Chikkatur, and W. Ketterle, Nature **396**, 345 (1998)
- [11] H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn, J. Stenger, S. Inouye, A.P. Chikkatur, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **82**, 2228 (1999)
- [12] 鳥井寿夫，『ルビジウム原子気体のボース・アインシュタイン凝縮体の生成および原子波干渉計への応用』，東京大学 博士論文 (2000)
- [13] W. Ketterle, D.C. Durfee, and D.M. Stamper-Kurn, preprint cond-mat/9904034 (1999)
- [14] 小野嘉之，『統計力学』 (1999)
- [15] A.L. Zubarev and Y.E. Kim, Phys. Rev. **A65**, 035601 (2002)
- [16] E.L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D.E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **59**, 2631 (1987)
- [17] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, J. Opt. Soc. Am. **B6**, 2023 (1989)
- [18] A. Migdall, J. Prodan, W.D. Phillips, T.H. Bergeman, and H.J. Metcalf, Phys. Rev. Lett. **54**, 2596 (1985)
- [19] K.B. Davis, M.-O. Mews, M.A. Joffe, R. Andrews, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **74**, 5202 (1995)
- [20] M.R. Matthews, 『Two-Component Bose-Einstein Condensation』, (1999)
- [21] M.D. Barrett, J.A. Sauer, and M.S. Chapman, Phys. Rev. Lett. **87**, 010404 (2001)
- [22] R. Grimm and M. Weidemuller, arXiv:physics/9902072 (1999)